Correction du dm n° 2 - 1 spé maths

Ex1

$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 & a = -1/2 \\ h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 1 & a = -1/3 \end{cases}$ $a<0$ donc $\cap$

pour $\mathcal{C}_g$, $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-1} = 1$ abscisse du sommet

/3

$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1 & a = \frac{1}{4} \\ k(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1 \end{cases}$ $a>0$ donc $\cup$

pour $\mathcal{C}_g$, $\alpha = \frac{2}{1/2} = 4$ abscisse du sommet

---

Ex2 : 1) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ sur $\mathbb{R}$

on pose $X = x^2$ avec $X \in [0 ; +\infty[$

l'équation devient

$3X^2 + 5X - 2 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4\times 3\times(-2) = 4$

$\sqrt{\Delta} = 7$

/5

$\begin{cases} X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-7}{6} = -2 \text{ ne convient pas} \\ X_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = 1/3 \end{cases}$

donc $x^2 = 1/3 \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

$S = \left\{ \frac{-\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

2) $x^3 - 4x^2 + x \geq 0 \iff x(x^2 - 4x + 1) \geq 0$

Soit $P(x) = x^2 - 4x + 1$

$\Delta = 16 - 4 = 12$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \\ x_2 = 2-\sqrt{3} \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-4x+1 ($a=1$ ($a>0$))		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^3-4x^2+x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

↳ du signe de a à l'extérieur des racines

$S = [0 ; 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3} ; +\infty[$

Ex3 : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$

1) $a=1$
$a>0$ donc

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ 2 $\nearrow$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \\ f(\alpha) = f(1) = 2 \end{cases}$$ 1,5

2) $S(1;2)$ est le sommet de $\mathcal{P}$ et $d : x = 1$ est l'axe de symetrie.
$f(0) = f(2) = 3$ et $f(3) = f(-1) = 6$ 1

3) $\mathcal{D}_0 : y = 2x$
$f(x) = 2x \iff x^2 - 4x + 3 = 0$ 1 est racine évidente
$\iff (x-1)(x-3) = 0$ $\quad 2\times 1 = 2$
$\iff x = 1$ ou $x = 3$ $\quad 2 \times 3 = 6$ 2

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_0$ se coupent en $S(1;2)$ et en $A(3;6)$

4) $\mathcal{D}_m : y = 2x + m$ $(m \in \mathbb{R})$

ⓐ on veut résoudre $f(x) = 2x + m \iff x^2 - 2x + 3 = 2x + m$
$\iff x^2 - 4x + (3-m) = 0$

le nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_m$ est le nombre de solutions de l'équation 1

ⓑ $\Delta_m = 16 - 4 \times (3-m) = 16 - 12 + 4m = 4 + 4m$ 0,5

m	$-\infty$ -1 $+\infty$
Δ_m	$-$ 0 $+$

0,5

ⓒ • pour $m > -1$, $\Delta m > 0$, on a 2 solutions donc 2 points d'intersection
• pour $m = -1$, $\Delta m = 0$, une seule solution donc un seul point d'intersection
1,5 • pour $m < -1$, $\Delta m < 0$, pas de solution, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_m$ ne se coupent pas.

15

Ex4 : 1) $\begin{cases} f(0) = 0 \text{ car } O \in \mathcal{C}_f \\ f'(0) \text{ est le coefficient directeur de la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en } O. \end{cases}$ 0,5

1

0,5 on lit $f'(0) = 2$

de même, $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = -3 \end{cases}$ en B et $\begin{cases} f(3) = -3 \\ f'(3) = 5 \end{cases}$ en C

0,75   0,75

2) $y = f'(3) \times (x-3) + f(3)$
$\iff y = 5(x-3) + (-3)$
$\iff y = 5x - 18$ 1
Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en C

Devoir n°2 - Second degré - Nombre dérivé - 1ère spé maths

20 octobre 2022 - 55 min

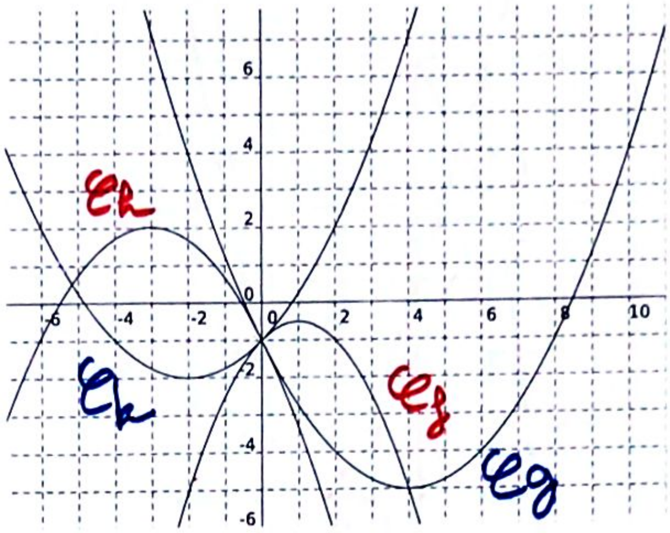
Exercice 1 (3 pts) :

f, g, h et k sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \qquad g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1$

$h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 1 \qquad k(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1$

Pour chacune de ces fonctions, indiquer laquelle des paraboles la représente.



Exercice 2 (5 pts) : Résoudre sur $\mathbb{R}$

1. $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$
2. $x^3 - 4x^2 + x \geqslant 0$

Exercice 3 (8 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $fx) = x^2 - 2x + 3$.
On appelle $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit la droite $\mathcal{D}_m$ d'équation $y = 2x + m$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Tracer $\mathcal{P}$ dans le repère ci-contre où la droite $\mathcal{D}_0$ d'équation $y = 2x$ est déjà tracée.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}_0$.
4. On cherche maintenant le nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}_m$.
   a) Montrer que le problème revient à chercher le nombre de solutions de l'équation
   $$x^2 - 4x + 3 - m = 0$$
   b) Calculer Δ_m, le discriminant de cette équation, et dresser son tableau de signes en fonction de m.
   c) En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_m$ en fonction de m.