Correction du dev n° 9 – 1spé

Ex 1 : 1) $e^{-2x-1} > 1$

/3

$\iff e^{-2x-1} > e^{0}$

$\iff -2x-1 > 0$ ($x \mapsto e^{x}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$\iff -2x > 1$

1,5 $\iff x < \frac{-1}{2}$ ($-2<0$)

$S =]-\infty \,;\, \frac{-1}{2}[$

2) $e^{x}e^{2} = e^{3x+2}$

$\iff e^{x+2} = e^{3x+2}$

$\iff x+2 = 3x+2$

$\iff 0 = 2x$

$\iff x = 0$ $S = \{0\}$

1,25

Ex 2 : 1) $f(x) = 3e^{-x} + 4x - 1$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

/8,5

$f'(x) = 3\times(-1)\times e^{-x} + 4 = -3e^{-x} + 4$

1/

2) $g(x) = (x^2-3)\,e^{x}$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = 2x\,e^{x} + (x^2-3)\,e^{x} = (x^2+2x-3)\,e^{x}$

1,5 $e^{x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de (x^2+2x-3)

or $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$ « 1 est racine évidente »

0,5 donc

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$6e^{-3}$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	

du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines

2

3) $h(x) = \dfrac{e^{4x}}{x}$ définie dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$h = \dfrac{u}{v}$ et $h' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

1,5 $h'(x) = \dfrac{4e^{4x}\times x - e^{4x}\times 1}{x^2} = \dfrac{e^{4x}(4x-1)}{x^2}$

$e^{x} > 0$ et $x^2 > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $(4x-1)$

0,5

x	$-\infty$		0		$1/4$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	$4e$	$\nearrow$	

1,5

Ex3. 1) ⓐ $f(0) = -4$ car $A(0;-4) \in \mathcal{C}$ 0,5 **19**

A ⓑ $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T en A, on lit $f'(0) = \frac{-4}{4} = -1$ 1+0,5

2) ⓐ $f(x) = (ax+b)e^{0,5x}$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = ae^{0,5x} + (ax+b)\times 0,5\, e^{0,5x}$$
$$= e^{0,5x}(a + 0,5\,ax + 0,5\,b)$$
$$= e^{0,5x} \times \frac{1}{2}(2a + ax + b)$$
$$= \frac{1}{2}(ax + 2a + b)\,e^{0,5x}$$

1,5

ⓑ $\begin{cases} f(0) = -4 \iff be^{0} = -4 \iff b = -4 \\ f'(0) = -1 \iff \frac{1}{2}(2a+b)\,e^{0} = -1 \iff 2a + b = -2 \end{cases}$

on a donc $2a - 4 = -2 \iff a = 1$ /2

~~donc~~ $f(x) = (x-4)e^{0,5x}$

B 1) $f'(x) = \frac{1}{2}(x+2-4)e^{0,5x} = \frac{1}{2}(x-2)\,e^{0,5x}$ 0,5

$\frac{1}{2}e^{0,5x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-2$ 0,5

alors

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	

0,5

$-2e$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ atteint en $x = 2$

$-2e \simeq -5,4$ 0,5

2) $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$\iff y = \frac{1}{2}e^{1,5}(x-3) + (-e^{1,5})$

$\iff y = \frac{1}{2}e^{1,5}x - \frac{5}{2}e^{1,5}$

tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3

1 + 0,5 tracé

$\left(\frac{1}{2}e^{1,5} \simeq 2,2\right)$