Correction du dev 11 - Produit scalaire

Ex 1 : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5\times 8 \times \cos(45°) = 40 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$

et $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 1/2(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ $\quad\quad$ $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$

$= 1/2(25 + 64 - BC^2)$ $\quad\quad$ ↑ chasles

alors $20\sqrt{2} = 1/2(89 - BC^2) \Leftrightarrow 40\sqrt{2} = 89 - BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 89 - 40\sqrt{2}$

d'où $BC = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}}$

ou d'après la formule de Al-Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$= 25 + 64 - 2\times 5 \times 8 \times \cos(45°)$

$= 89 - 80\frac{\sqrt{2}}{2} = 89 - 40\sqrt{2}$ $\quad$ d'où $BC = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}}$

3,5

Ex 2 :

D(-3 ; 4)
E(-1 ; -2)
F(5 ; 1)

1) $\vec{DE}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{DF}\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{DE}\cdot\vec{DF} = 16 + 18 = 34$ $\quad$ 1,5

2) $\vec{DE}\cdot\vec{DF} = DE \times DF \times \cos(\widehat{EDF})$ $\quad$ 4,5

$\begin{cases} DE^2 = 4 + 36 = 40 \Leftrightarrow DE = \sqrt{40} \\ DF^2 = 64 + 9 = 73 \Leftrightarrow DF = \sqrt{73} \end{cases}$ $\quad$ 3

on a donc $34 = \sqrt{40}\sqrt{73}\cos(\widehat{EDF}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{EDF}) = \frac{34}{\sqrt{40}\sqrt{73}}$

D'après la calculatrice : $\widehat{EDF} \simeq 51°$

12,5

Ex 3 : AB = 8 et I milieu de [AB]

1) d'après le théorème de la médiane $\quad$ 2

$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = MI^2 - \frac{1}{4}\times 64 = MI^2 - 16$

donc $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = -7 \Leftrightarrow MI^2 - 16 = -7 \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow MI = 3$

L'ensemble cherché est le cercle $\mathcal{C}$ de centre I $\quad$ 0,5

de rayon 3.

2) $\vec{AH}\cdot\vec{AB} = 24$ $\quad$ $24 > 0$ et $H \in (AB)$ $\quad$ 1,5

donc $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ colinéaires de même sens

$\vec{AH}\cdot\vec{AB} = 24 \Leftrightarrow AH \times AB = 24 \Leftrightarrow AH \times 8 = 24 \Leftrightarrow AH = 3$

3) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 24 \iff (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM})\cdot\overrightarrow{AB} = 24$ d'après Chasles

$\iff \underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=24} + \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB} = 24$

$\iff \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

1,5

4) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 24 \iff \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \iff (HM)\perp(AB)$

L'ensemble cherché est la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (AB) passant par H

1

5) 2 points vérifient $\begin{cases}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -7\\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 24\end{cases}$; les points C et D intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$

0,5

+ 0,5 dessin

Ex 4 : 1) Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$M(x ; 0)$

$N(0 ; x)$ car $AM = AN$

$B(1 ; 0)$

$C(0 ; 1)$

$I\left(\frac{x}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ car I milieu de $[CM]$

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$

16

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BN} = \frac{-x}{2} + \frac{x}{2} = 0$

alors $(AI)\perp(BN)$

1,5

2) Sans Repère

$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires de sens contraires

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AM}$ donc $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

$\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires de même sens

1,5

donc $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(-AB\times AM + AN\times AC)$ or $AB = AC$ et $AM = AN$

alors $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$ d'où $(AI)\perp(BN)$