Correction du devoir n° 3 _ 1 Spé maths

14

Ex 1 : $(P) : y = x^2$ et $(d_m) : y = mx + m - 3$ $(m \in \mathbb{R})$

1) pour trouver les points d'intersection de (P) et (d_m), il faut résoudre

$x^2 = mx + m - 3 \iff x^2 - mx - m + 3 = 0$

0,5

2) $\Delta_m = m^2 - 4(-m+3) = m^2 + 4m - 12$ 2 est racine évidente

$= (m-2)(m+6)$

1

m	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
Δ_m $a = 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

du signe de a à l'extérieur des racines

1,5

3) P et (d_m) ne se coupent pas si l'équation n'admet aucune solution c'est à dire quand $\Delta_m < 0$: $-6 < m < 2$

1

Ex 2 : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ sur $\mathbb{R}$

1) $P(2) = 2 \times 2^3 - 5 \times 2^2 + 2 + 2 = 16 - 20 + 4 = 0$

0,5

2 est racine de P

donc 2) $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$

$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

par identification des coefficients

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -5 \\ c - 2b = 1 \\ -2c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ -1 - 2 \times (-1) = 1 \text{ vrai} \\ c = -1 \end{cases}$$

donc $P(x) = (x-2)(2x^2 - x - 1)$

2

3) $P(x) = 0 \iff (x-2)(2x^2 - x - 1) = 0$ → 1 est racine évidente

$\iff (x-2)(x-1)(2x+1) = 0$

$S = \{-\frac{1}{2} ; 1 ; 2\}$

1,5 /4

Ex 3 : 1) $f'(-5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse (-5)

On lit $f'(-5) = \frac{4}{3}$ 0,5

de même $f'(-4) = 0$ (tangente horizontale)

et $f'(-2) = -6$; $f'(4) = \frac{-3}{4}$ +2

2) $T_4 : y = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}$ → ordonnée à l'origine 1

$T_{-2} : y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$ or $f(-2) = \frac{1}{2}$

donc $y = -6(x+2) + \frac{1}{2}$

$\iff y = -6x - 12 + \frac{1}{2}$ 1,5 16

$\iff y = -6x - \frac{23}{2}$

3) $f'(x) \geq 0 \iff f$ croissante 1 $S =]-\infty ; -4] \cup [-1 ; 2]$

Ex 4 : 1) ⓐ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$ 1

16 ⓑ $g(x) = \sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x}$ $\Big\{$ définie sur $]0 ; +\infty[$ dérivable

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} \quad \left(= \frac{x^2 - 8\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}} \right)$ 1

ⓒ $h(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$ définie dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$h = \frac{u}{v} \quad h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$h'(x) = \frac{(2x+4)(x-1) - (x^2+4x-1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 4 - x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2}$

donc $h'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ 2

2) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$

$\Delta = 16 - 4 \times 3 \times (-3) = 52$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{13}}{6} = \dfrac{2+\sqrt{13}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{13}}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$ $a = 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

du signe de a à l'extérieur

donc f croissante sur $\left]-\infty ; \frac{2-\sqrt{3}}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{2+\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[$

f décroissante sur $\left]\frac{2-\sqrt{3}}{3} ; \frac{2+\sqrt{3}}{3}\right[$

Ex 5 (Bonus) $g(x) = -x^2 + 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$

$a = 1$

$$\begin{cases} g(1) = -1 + 3 + 2 = 4 \\ g(1+h) = -(1+h)^2 + 3(1+h) + 2 = -(1 + 2h + h^2) + 3 + 3h + 2 \end{cases}$$

$= -h^2 + h + 4$

Donc $T_1(h) = \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h} = \dfrac{-h^2 + h}{h} = \dfrac{h(-h+1)}{h}$

$\underline{h \neq 0}$ $= -h + 1$

$\lim\limits_{h \to 0} T_1(h) = 1$

Par définition g est dérivable en $a = 1$ et $g'(1) = 1$