Correction du devoir n° 14 - 1spé

Ex1 : • $f_1(x) = (2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$

$f_1'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = e^x(2x+1)$

du signe de $(2x+1)$

1,5

155

• $f_2(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f_2'(x) = \dfrac{e^x \times (1-x) - e^x \times (-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{e^x(1-x+1)}{(1-x)^2} = \dfrac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$

du signe de $(2-x)$

2

• $f_3(x) = (x^2-1)e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$

$f_3'(x) = 2x e^{3x} + (x^2-1) \times 3e^{3x} = e^{3x}(2x+3x^2-3)$ 2

$= e^{3x}(3x^2+2x-3)$ du signe de $(3x^2+2x-3)$

Ex2 : 1) ⓐ $f(0) = 3$ car $E(0;3) \in \mathcal{C}$ 0,5

0,75 $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en A, $f'(1) = 0$ (tangente horizontale). De même $f'(-3) = 0$ en B 0,75

$f'(0) = 3$ en E 0,5

ⓑ $y = 3x + 3$ tangente à $\mathcal{C}$ en E 0,5

ⓒ $\mathcal{C}$ coupe (Ox) en 2 points d'abscisses environ 1,8 et $-1,8$

donc $f(x) = 0$ $S = \{-1,8 ; 1,8\}$ 1

2) $f(x) = (ax^2+bx+c)e^x$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

sur $]-\infty ; 2]$

ⓐ $f'(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x$ 1

$= e^x(ax^2 + 2ax + bx + b + c)$

ⓑ $f(0)=3 \iff ce^0=3 \iff c=3$ 0,5

$f'(0)=3 \iff (b+c)e^0 = 3 \iff b+c=3$

Donc $b=0$ 1

$f'(1)=0 \iff (a+2a+b+b+c)e = 0$ 1

$\iff (3a+3)=0 \iff a=-1$

Donc $f(x)=(-x^2+3)e^x$

<u>Ex 3</u> : $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x-1}$ sur $]0;+\infty[$ (7)

1) $g(x)=-xe^x-1$ pour $x \in [0;+\infty[$

1 ⓐ $g'(x) = -e^x+(-x)e^x = -(1+x)e^x$

ⓑ $e^x>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-(1+x)$

ou encore $-1-x$ $1+x>0$

x	0 $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$

$g'(x)<0$

1,5 g ~~strictement~~ décroissante sur $[0;+\infty[$

ⓒ or $g(0)=-1$ est le maximum pour

1,5 g sur $[0;+\infty[$ donc $g(x)<0$.

2) $f'(x) = \dfrac{1\times(e^x-1)-(x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{\cancel{e^x}-1-xe^x-\cancel{e^x}}{(e^x-1)^2}$

$\iff f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$ $\quad (e^x-1)^2>0$ donc $f'(x)$ a la même signe que $g(x)$.

2

3) $f'(x)<0$ donc f ~~strictement~~ décroissante

1 sur $]0;+\infty[$.