Devoir n° 12 – 1ère Spé

Ex 1 : 1) $\begin{cases} u_1 = -12 \\ u_5 = 0 \end{cases}$ $u_5 = u_1 + 4r$ $\Leftrightarrow 0 = -12 + 4r$ $\Leftrightarrow r = 3$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite arithmétique de raison 3 de 1er terme $u_0 = -15$

2/

$u_0 = u_1 - r = -12 - 3 = -15$

2) $S = 10 + 20 + 30 + \dots + 170 + 180$

$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_n = 180 \end{cases}$ $u_n = u_0 + n \times 10$ $\Leftrightarrow 180 = 10 + 10n$

$\Leftrightarrow n = 17$

/4

2/

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{17} = \frac{(u_0 + u_{17}) \times 18}{2} = \frac{190 \times 18}{2} = 1710$

Ex 2 : 1) $\begin{cases} v_2 = 6 \\ v_4 = 54 \end{cases}$ $v_4 = v_2 \times q^2$ $\Leftrightarrow 54 = 6 \times q^2$ $\Leftrightarrow q^2 = 9$ $\overset{q<0}{\Leftrightarrow} q = -3$

$v_2 = v_0 \times q^2$ $\Leftrightarrow 6 = v_0 \times 9$ $\Leftrightarrow v_0 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

2/

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite géométrique de raison (-3) de 1er terme $v_0 = \frac{2}{3}$

/4

2) $S = 1 + 2 + 4 + \dots + 1024 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$

or $1024 = 2^{10}$ donc $S = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1 = 2047$

2/

Ex 3 : 1) $u_n = 3^n - 2$ $(n \in \mathbb{N})$

$u_{n+1} - u_n = (3^{n+1} - 2) - (3^n - 2) = 3^{n+1} - 3^n$

$= 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n$

1,5

/3

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

2) $v_n = \frac{2n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $v_n = f(n)$

1,5

avec $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ $f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

sur $[0; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissante et (v_n) aussi

Ex 4 : 1) a) $\begin{cases} u_0 = 1000 \text{ (g)} \\ u_{n+1} = 1{,}2\,u_n - 100 \end{cases}$ 1000 g = 1 kg bactéries initialement

perte de 100 g par jour

1,5 augmenter de 20% revient à $\times\left(1+\frac{20}{100}\right)$ soit $\times 1{,}2$.

u_n est la masse de bactéries en g le $n^{\text{ième}}$ jour

b) $\begin{cases} u_1 = 1{,}2\,u_0 - 100 = 1100 \\ u_2 = 1{,}2\,u_1 - 100 = 1220 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} u_2 - u_1 = 120 \\ u_1 - u_0 = 100 \end{matrix}\right\} \neq$ $\left.\begin{matrix} \frac{u_2}{u_1} \simeq 1{,}11 \\ \frac{u_1}{u_0} = 1{,}1 \end{matrix}\right\} \neq$ 1,5

(u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

c) il s'agit de résoudre $u_n \geq 30000$

on a $\begin{cases} u_{22} < 30000 \\ u_{23} > 30000 \end{cases}$ La masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 23 jours

1

d) algo 1

2) $\boxed{v_n = u_n - 500}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 500$
$= (1{,}2u_n - 100) - 500$
$= 1{,}2u_n - 600$
$= 1{,}2(v_n + 500) - 600$
$= 1{,}2v_n + 600 - 600$
$= 1{,}2v_n$

1,5

$v_0 = u_0 - 500 = 500$

1 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1,2 de 1er terme $v_0 = 500$

b) donc $v_n = v_0 \times q^n = 1{,}2^n \times 500$ 0,5 $(n \in \mathbb{N})$

et $u_n = v_n + 500 = \boxed{500 \times 1{,}2^n + 500}$ 0,5

c) Il semble que (u_n) tende vers $+\infty$ 0,5

En fait $1{,}2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$