Correction du devoir n° 6 - 1 spé

Ex 1 : 1) $\widehat{IOA} = 45° = \frac{\pi}{4}$ radians 0,5

($OA = OI = 1$ le triangle IOA est isocèle en O)

2) Dans le triangle OHA rectangle en H 1,5

$\widehat{AOH} = 45°$ donc $\widehat{OAH}$ aussi ($\widehat{OAH} = 180 - 90 - 45 = 45°$)

donc OHA est aussi isocèle en H : $OH = AH$

3) d'après le théorème de Pythagore

$OH^2 + AH^2 = OA^2 \iff 2\,OH^2 = 1 \iff OH^2 = \frac{1}{2}$

$\iff OH = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2

or $OH = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $AH = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ /3,5

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ex 2 : 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 0,5

2) figure 1,5

3) $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$ (symétrie par rapport à (OJ))

/3,5

$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2} \end{cases}$ (symétrie par rapport à (OI)) 1,5

$\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2} \end{cases}$ (symétrie par rapport à O)

Ex 3 : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ /3

$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \iff \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$

$\iff \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \iff \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ 2

$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ alors $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ 1

Ex 4 : 1) dans $]-\pi;\pi]$ $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right\}$ 1

2) $f(x) = \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$

1 ⓐ $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k'\pi\right\}$ $k, k' \in \mathbb{Z}$

1 ⓑ f est paire et 2π-périodique

1 ⓒ f paire $\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ symétrique / (Oy)

1 ⓓ f 2π-périodique ; on recopie le schéma

1 ⓔ graphique $\frac{-\sqrt{2}}{2} \approx$

/6

Ex 5 : Ⓐ $f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$ sur $[0;+\infty[$

/4

1) $f'(x) = 4x^3 + 2x - 6$

or $(x-1)(4x^2+4x+6) = 4x^3 + 4x^2 + 6x$
$\quad - 4x^2 - 4x - 6$
$= 4x^3 + 2x - 6$

3,5

donc $f'(x) = (x-1)(4x^2+4x+6)$

2) Signe de $4x^2+4x+6$

$\Delta = -80$ $\Delta < 0$ donc $4x^2+4x+6 > 0$ 1

du signe de $a = 4$

3) $f'(x)$ est du signe de $(x-1)$ donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\searrow$	5	$\nearrow$	

3,5

Ⓑ 1) $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$
$= (x-3)^2 + (x^2-0)^2$
$= x^2 - 6x + 9 + x^4$
$= f(x)$

2) or $x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante sur $[0;+\infty[$

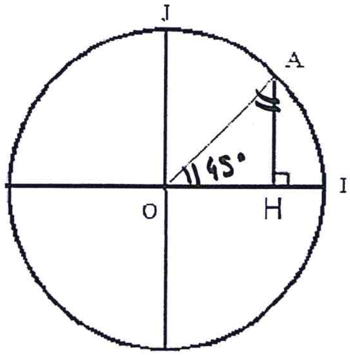
donc AM minimale pour $x = 1$

soit $M(1;1)$, elle vaut $\sqrt{5}$

Devoir n°6 - Trigonométrie - Optimisation - 1ère spé maths

18 décembre 2019 - 1h

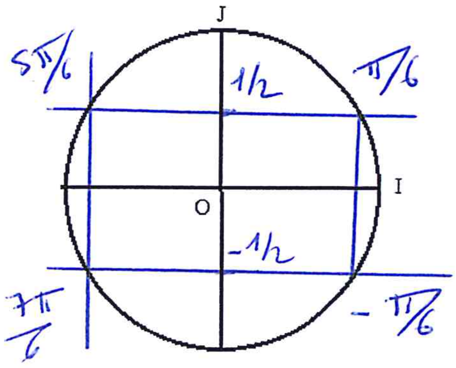
Exercice 1 (3,5 pts) : Démonstration de cours



Sur le cercle trigonométrique ci-contre, on a placé le point A tel que $\widehat{IOA} = 45°$.

1. Donner la mesure de $\widehat{IOA}$ en radians.
2. On note H le pied de la hauteur issue de A dans IOA : quelle est la nature du triangle OHA ?
3. En déduire la valeur de $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ puis $sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 2 (3,5 pts) :



1. Rappeler les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
2. En utilisant la valeur de $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et en laissant les tracés en pointillés, placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les mesures $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{-\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.
3. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de chacun des angles ci-dessus.

Exercice 3 (3 pts) : On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 4 (6 pts) :

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos(x)$

   a) Résoudre l'équation $cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

   b) ~~Rappeler(sans justifier) les propriétés de la fonction cos (parité, périodicité)~~

   c) On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f sur $[0;\pi]$.
   Compléter (en rouge) le tracé sur $[-\pi;0]$ en précisant la propriété de la fonction cosinus utilisée.

d) Compléter (au crayon) le tracé sur $[-2\pi;2\pi]$ en précisant la propriété de la fonction cosinus utilisée.

e) Retrouver graphiquement les solutions de l'équation $cos(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$
(faire apparaître les tracés sur le graphique)

Exercice 5 (4 pts) :

Partie A (4 pts) : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

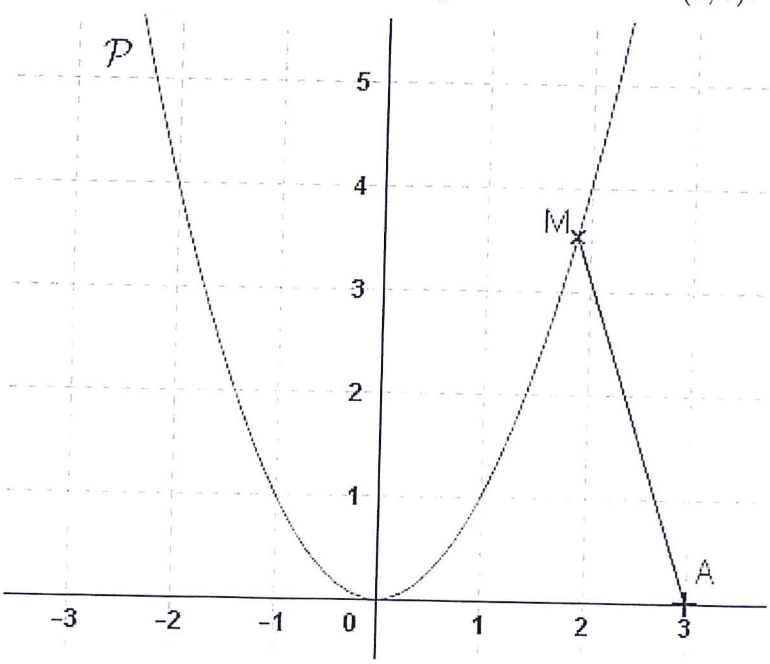
$$f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$$

1. Montrer que $f'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 6)$
2. Quel est le signe de $4x^2 + 4x + 6$?
3. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

BONUS : **Partie B (2 pts) :**

On rappelle que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ dans un repère orthonormé.

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$,
et M est un point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $x \geq 0$. Le point A a pour coordonnées $(3;0)$.



1. Exprimer AM^2 en fonction de x.
2. En déduire la position du point M pour que la distance AM soit minimale.