Correction du devoir n°5 - 1 spé

18

Ex1 : A 1) $f'(-3/2)$ est le coefficient directeur de (T) tangente à $\mathcal{C}$ en A ; on lit $\boxed{f'(-3/2) = -6}$ 1

2) $f'(x) = 0$ si la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses ; on lit $\boxed{S = \{-1\}}$ 0,75

B $\boxed{f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 8}{x+2}}$ définie sur $]-2\,;+\infty[$

1) a) f est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ comme quotient $(x+2 \neq 0)$

$u(x) = 2x^2 - x - 8 \qquad u'(x) = 4x - 1$

$v(x) = x + 2 \qquad v'(x) = 1$

$\begin{cases} f = \dfrac{u}{v} \\ f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{(4x-1)(x+2) - (2x^2 - x - 8)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 8x - x - 2 - 2x^2 + x + 8}{(x+2)^2} = \boxed{\frac{2x^2 + 8x + 6}{(x+2)^2}}$$ 2

b) $(x+2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $N(x) = 2x^2 + 8x + 6$ 0,5

$\Delta = 64 - 4 \times 2 \times 6 = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4 \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8-4}{4} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-8+4}{4} = -1 \end{cases}$ 0,5

x	-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$, $a = 2$	‖	$-$	0	$+$	

du signe de a à l'extérieur des racines 0,75

c) on en déduit

x	-2		-1		$+\infty$
$f(x)$	‖	↘	-5	↗	

0,75

0,5

d) -5 est le minimum pour f sur $]-2\,;+\infty[$ atteint en $x = -1$

(D) : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$ 1,25 donc $\boxed{y = \frac{3}{2}x - 4}$

$f'(0) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $f(0) = \frac{-8}{2} = -4$ Tangente à $\mathcal{C}$ en $B(0\,;-4)$

Ex2 : $C(x) = 2x^3 - 108x^2 + 5060x - 4640$ sur $[6\,;32]$

0,5 coût de fabrication en € pour x milliers de pièces

1) Une pièce est vendue 3,50 € donc x milliers de pièces sont vendues $3{,}50 \times 1000 \times x = 3500x$ (€)

alors $B(x) = 3500x - C(x)$ 0,5

Soit $B(x) = 3500x - (2x^3 - 108x^2 + 5060x - 4640)$

$= \underline{-2x^3 + 108x^2 - 1560x + 4640}$ Bénéfice en €

0,75

2) $\underline{B'(x) = -6x^2 + 216x - 1560}$ 0,5

$\Delta = 9216$

$\sqrt{\Delta} = 96$ 0,5

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-216 - 96}{-12} = 26 \\ x_2 = \dfrac{-216 + 96}{-12} = 10 \end{cases}$

x	6		10		26		32
$B'(x)$ $a=-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

du signe de a à l'extérieur

0,75

3) Donc

x	6	10	26	32
$B(x)$	-1264 ↘	-2160 ↗	1936 ↘	-224

1,5 /6

4) Le bénéfice maximal sera de 1936 € pour 26 000 pièces fabriquées et vendues 1

Ex3 : 1) $h(x) = \dfrac{6-2x}{3x-6}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

ⓐ h dérivable comme quotient sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ $(3x - 6 \neq 0)$

$h'(x) = \dfrac{-2(3x-6) - (6-2x) \times 3}{(3x-6)^2} = \dfrac{-6}{(3x-6)^2}$ 1,5

ⓑ $h'(x) < 0$ donc h strictement décroissante 1,5

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	↘	‖	↘

2) $g(x) = 2x^2\sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$ /6

ⓐ g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit

$g'(x) = 4x\sqrt{x} + 2x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 4x\sqrt{x} + \dfrac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = 4x\sqrt{x} + x\sqrt{x}$

$= 5x\sqrt{x}$ 1,5

ⓑ $5x\sqrt{x} > 0$ pour $x > 0$

$g'(x) > 0$ donc g strictement croissante 1,5

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↗	

ⓒ Bonus : en 0 ?

$\dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \dfrac{2h^2\sqrt{h} - 0}{h} = 2h\sqrt{h}$

pour $h > 0$

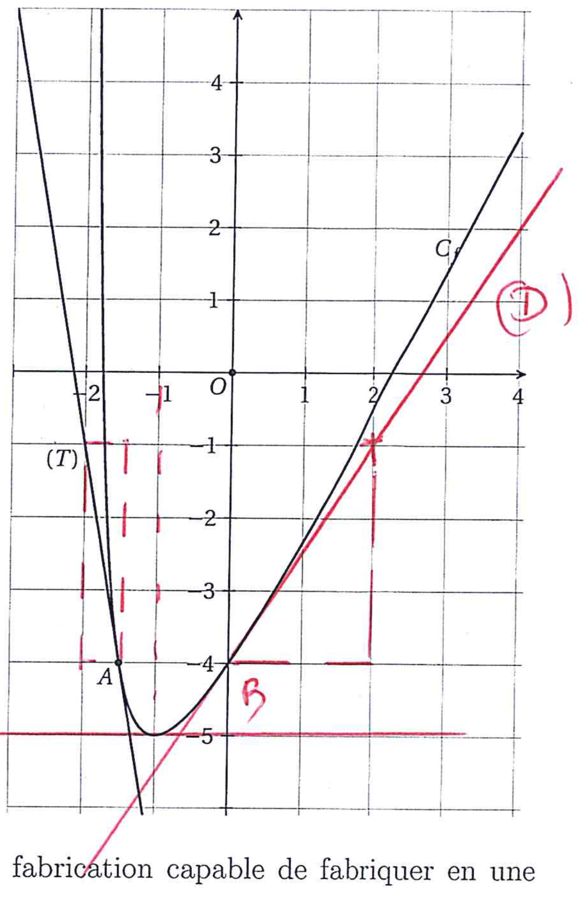
$\lim\limits_{h \to 0} 2h\sqrt{h} = 0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$

Devoir n°5 - Dérivation - 1ère spé maths

27 novembre 2019 - 1h

Exercice 1 (8 pts) :

Partie A : Par lecture graphique



Ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-2;+\infty[$. On a placé le point $A(-\frac{3}{2};-4)$ sur $\mathcal{C}_f$, et on a tracé la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en A.

1. Lire $f'(-\frac{3}{2})$.
2. Pour quel(s) $x \in]-2;+\infty[$, on a $f'(x) = 0$?

Partie B : On donne $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 8}{x+2}$

1. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 6}{(x+2)^2}$
   b) Déterminer le signe de $f'(x)$.
   c) En déduire le tableau de variations de f.
   (les limites ne sont pas demandées)
   d) La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui, lequel ?
2. Déterminer l'équation de la tangente (D) à C_f au point d'abscisse 0, et la tracer sur le graphique ci-contre.

Exercice 2 (6 pts) : Une entreprise possède une chaîne de fabrication capable de fabriquer en une semaine entre 6 000 et 32 000 pièces identiques.
Le coût de fabrication, en euros, de x milliers de pièces, pour x compris entre 6 et 32, est noté $C(x)$, où C est la fonction définie sur [6 ;32] par :

$$C(x) = 2x^3 - 108x^2 + 5\ 060x - 4\ 640$$

Toutes les pièces produites sont vendues au prix de 3,50 € l'unité.
On note $B(x)$ le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces.

1. Montrer que, pour tout $x \in [6;32]$, $B(x) = -2x^3 + 108x^2 - 1\ 560x + 4\ 640$.
2. Déterminer $B'(x)$, et étudier son signe sur $[6;32]$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction B.
4. Quel est le bénéfice maximal réalisable par l'entreprise ?
   Donner le nombre de pièces à produire qui réalise ce maximum.

Exercice 3 (6 pts) :

1. La fonction h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $h(x) = \dfrac{6-2x}{3x-6}$
   a) Calculer $h'(x)$.
   b) Déterminer le signe de $h'(x)$; en déduire le tableau de variation de la fonction h (les limites ne sont pas demandées).
2. La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = 2x^2\sqrt{x}$
   a) Calculer $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   b) Déterminer le signe de $g'(x)$; en déduire le tableau de variation de la fonction g (les limites ne sont pas demandées).
   c) **BONUS :** Montrer que g est dérivable en 0.