Correction du devoir n°15 – Exp. 15

Ex 1 : 1) ⓐ $f(0) = 3$ car $E(0\,;3) \in \mathcal{C}$ 0,5

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en A (d'abscisse 1). 0,5

$f'(1) = 0$ (tangente parallèle à l'axe des abscisses)

de même, 0,5

$f'(-3) = 0$ (en B) et on lit $f'(0) = 3$ (en E) 0,5

ⓑ on lit $T_E : y = 3x + 3$ 0,5

ⓒ Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses

on lit $S = \{-1,8\,;\,1,8\}$ environ 0,5

2) $f(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^x$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

définie dérivable sur $]-\infty\,;2]$ /6

ⓐ $f'(x) = (2ax + b)\,e^x + (ax^2 + bx + c)\,e^x$

$= (ax^2 + 2ax + bx + b + c)\,e^x$ 1

ⓑ $f(0) = 3 \iff c\,e^0 = 3 \iff c = 3$

$f'(1) = 0 \iff (3a + b + 3)\,e^1 = 0 \iff 3a + b + 3 = 0$

$\iff 3a + b = -3$

$f'(0) = 3 \iff (b + 3)\,e^0 = 3 \iff b + 3 = 3 \iff b = 0$

On a donc $a = -1$, $b = 0$ et $c = 3$

$f(x) = (-x^2 + 3)\,e^x$ 2

Ex2 : $f(x) = (x-2)e^{-2x+6} + 3$ /5

1) définie dérivable sur $\mathbb{R}$

ⓐ $f'(x) = 1 \times e^{-2x+6} + (x-2)e^{-2x+6} \times (-2)$

$= e^{-2x+6}(1 - 2x + 4)$ 1,5

$= (-2x+5)e^{-2x+6}$

ⓑ $e^{-2x+6} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-2x+5)$

x	$-\infty$		2,5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

1,5

donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 2,5]$ puis décroissante sur $[2,5; +\infty[$

2) { f est le bénéfice en millions d'euros
x quantité en tonnes de métal vendue

ⓐ Pour réaliser un bénéfice, il faut que $f(x) > 0$ 1

D'après la calculatrice

$f(1,752) < 0$
$f(1,753) > 0$

Donc à partir de 1,753 t vendues, l'entreprise fera un bénéfice

ⓑ Le maximum pour f est atteint en $x = 2,5$ et $f(2,5) = 0,5\,e + 3 \simeq 4,359$

Donc le bénéfice sera maximal pour 2,5 t vendues, il sera de 4,36 millions d'€ environ 1

Ex 3 : $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x - 1}$ définie dérivable sur $]0;+\infty[$

1) $g(x) = -xe^x - 1$ définie dérivable sur $[0;+\infty[$

1 ⓐ $g'(x) = -e^x - xe^x = -(1+x)e^x$

sur $[0;+\infty[$, $1+x>0$, $e^x>0$ donc $g'(x)<0$

+1 g strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

ⓑ $g(0) = -1$

1 donc $g(x) < g(0) < 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

2) $f'(x) = \dfrac{1\times(e^x-1) - (x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{e^x - 1 - xe^x - e^x}{(e^x-1)^2}$

2 $= \dfrac{-xe^x - 1}{(e^x-1)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

$(e^x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

3) $f'(x)<0$ donc f strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

1

/6

Ex 4 : $f(x) = x e^{-x}$ et $g(x) = x e^{-x} - 2x$
définies dérivables sur $\mathbb{R}$

/3

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \times e^{-x} + x e^{-x} \times (-1) = (1-x) e^{-x} \\ g'(x) = (1-x) e^{-x} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \times e^{0} = 1 \\ g'(0) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$ coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ en 0

soit T la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0
et soit T' ~~la tangente~~ à $\mathcal{C}_g$ en 0

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ leurs vecteurs directeurs

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 - 1 = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{u}'$

$\iff T \perp T'$