Devoir n°13 - 1S

17

Ex 1 :

1) $\mathcal{D} : 3x - y + 5 = 0$ $\qquad A(-1\,;3)$

ⓐ $\mathcal{D}_1 /\!/ \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}$ ont le même vecteur directeur

alors $\mathcal{D}_1 : 3x - y + c = 0$

$A \in \mathcal{D}_1 \iff 3 \times (-1) - 3 + c = 0 \iff c = 6$

2 $\mathcal{D}_1 : \boxed{3x - y + 6 = 0}$

ⓑ $\mathcal{D}_2 \perp \mathcal{D}$ alors un vecteur normal de $\mathcal{D}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{D}$, vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$

$\mathcal{D}_2 : -x - 3y + c = 0$

2 $A \in \mathcal{D}_2 \iff 1 - 9 + c = 0 \iff c = 8$

$\mathcal{D}_2 : \boxed{-x - 3y + 8 = 0}$

2) ⓐ $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I;4)$ avec $I(3;-1)$

1 $\mathcal{C}$ a pour équation $\boxed{(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16}$

ⓑ $\mathcal{C}'$ cercle de diamètre $[BC]$

$B(-2;1)$ $\qquad M(x;y) \in \mathcal{C}' \iff \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

$C(4;-1)$ $\qquad \iff (x+2)(x-4) + (y-1)(y+1) = 0$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\end{pmatrix}$ $\qquad \iff x^2 - 4x + 2x - 8 + y^2 - 1 = 0$

2 $\qquad \iff \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0}$

Équation cartésienne de $\mathcal{C}'$

Ex2 :

A $(6;0)$
B $(8;4)$

$\mathcal{C}$ d'équation
$\boxed{x^2-6x+y^2-8y=0}$

1) • $0^2-6\times0+0^2-8\times0=0$ $\quad O\in\mathcal{C}$

• $6^2-6\times6+0^2-8\times0$
$=36-36=0$ $\quad A\in\mathcal{C}$

• $8^2-6\times8+4^2-8\times4$
$=64-48+16-32$
$=0$ $\quad B\in\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ passe par O, A et B
c'est donc le cercle circonscrit au triangle OAB.

1,5

/8

$x^2-6x+y^2-8=0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2-3^2+(y-4)^2-4^2=0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25=5^2$

1,5

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I(3;4)$ de rayon 5

2) $\Delta : x-y+6=0 \Leftrightarrow y=x+6$
on cherche les intersections de Δ et $\mathcal{C}$
Il s'agit de résoudre

on remplace y par $x+6$ dans $\mathcal{C}$

$x^2-6x+(x+6)^2-8(x+6)=0$
$\Leftrightarrow x^2-6x+x^2+12x+36-8x-48=0$
$\Leftrightarrow 2x^2-2x-12=0$
$\Leftrightarrow \boxed{x^2-x-6=0}$ $\quad \Delta=1-4\times(-6)=25$

$\begin{cases} x_1=\dfrac{1+5}{2}=3 & y_1=3+6=9 \\ x_2=\dfrac{1-5}{2}=-2 & y_2=-2+6=4 \end{cases}$

2,5

Δ et $\mathcal{C}$ se coupent en $C(3;9)$ et $D(-2;4)$

3) Soit $E(6;8)$ $\left(I(3;4) \text{ centre du cercle}\right)$

$6^2 - 6\times6 + 8^2 - 8\times8 = 0$ donc $E \in \mathscr{C}$ 95

Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ en E

alors $(T) \perp (IE)$

$\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ vecteur normal à (T)

donc $(T): 3x + 4y + c = 0$

$E \in (T) \iff 3\times6 + 4\times8 + c = 0$

$\iff c = -50$ 2

$(T): \boxed{3x + 4y - 50 = 0}$

Ex 3 : $\mathscr{P}: y = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$

- Soit S le sommet de $\mathscr{P}$, on a $S(-2;1)$

donc $a\times(-2)^2 + b\times(-2) + c = 1$ 1,5

$\iff \boxed{4a - 2b + c = 1}$

de plus $\alpha = \frac{-b}{2a} = -2 \iff -b = -4a \iff \boxed{4a - b = 0}$

- $A(-1;0) \in \mathscr{P} \iff a\times(-1)^2 + b\times(-1) + c = 0$

$\iff \boxed{a - b + c = 0}$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 & (L_1) \\ a - b + c = 0 & (L_2) \\ 4a - b = 0 \end{cases}$$

$(L_1) - (L_2)$ donne $\boxed{3a - b = 1}$

or $4a - b = 0$

on soustrait les 2 équations

$-a = 1$

$\iff a = -1$

$b = 4a = -4$

$c = -a + b = 1 - 4 = -3$

Donc $\mathscr{P}: \boxed{y = -x^2 - 4x - 3}$