Correction du devoir n°12 - 1Spé

Ex1 : 1) $\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_5 = 0 \end{cases}$

- $u_5 = u_4 + 1 \times r$
$\iff 0 = -12 + r$
$\iff r = 12$ — 2

- $u_4 = u_0 + 4r \iff -12 = u_0 + 48 \iff u_0 = -60$

(u_n) suite arithmétique de raison 12
de terme initial $u_0 = -60$.

2) $S = 10 + \underset{+10}{20} + \underset{+10}{30} + \dots + 180$ on pose $u_0 = 10$
$u_n = 10 + 10n = 10(n+1)$

$180 = u_n \iff 180 = 10(n+1) \iff n+1 = 18 \iff n = 17$

Donc $S = u_0 + \dots + u_{17} = \dfrac{(u_0 + u_{17}) \times 18}{2} = \dfrac{(10+180) \times 18}{2}$

$\boxed{S = 1710}$ — 2

Ex2 : 1) $\begin{cases} v_2 = 2 \\ v_5 = 54 \end{cases}$

- $v_5 = v_2 \times q^3$
$\iff 54 = 2 \times q^3$
$\iff 27 = q^3 \iff q = 3$

- $v_2 = v_0 \times q^2 \iff 2 = v_0 \times 9 \iff v_0 = 2/9$

(v_n) suite géométrique de raison 3
de terme initial $v_0 = 2/9$ — 2

2) $S = 1 + \underset{\times 2}{2} + \underset{\times 2}{4} + \dots + 1024$ on pose $v_0 = 1$
$v_n = 1 \times 2^n = 2^n$

$1024 = 2^n \iff \boxed{n = 10}$ d'après la calculatrice

Donc $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \dfrac{1 - 2^{11}}{-1}$

$\boxed{S = 2^{11} - 1 = 2047}$ — 2

Ex 3 : 1) $u_n = 5n + 3$ $(n \in \mathbb{N})$

On reconnait une suite arithmétique $u_n = u_0 + nr$

avec $u_0 = 3$ et $r = 5$ $\quad u_{n+1} - u_n = 5$ (>0)

(u_n) croissante

1

2) $v_n = \frac{2n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\quad v_n = f(n)$

avec $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ sur $[0;+\infty[$ $\quad f'(x) > 0$ donc f croissante

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

donc (v_n) croissante

1,5

ou $v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$

$v_{n+1} - v_n > 0$

3) $\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = w_n - n^2 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

$w_{n+1} - w_n$
$= w_n - n^2 - w_n$
$= -n^2$

$-n^2 \leq 0$ donc $w_{n+1} < w_n$

(w_n) décroissante

1,5

Ex 8 : $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ \boxed{u_{n+1} = 1{,}2 u_n - 100} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) a) au départ 1 kg = 1000 g de bactéries $\rightarrow u_0$

augmenter de 20% revient à $\times\left(1 + \frac{20}{100}\right)$ soit $\boxed{\times 1{,}2}$

100 g de bactéries sont perdus $\rightarrow -100$

N $\quad u_n$ représente la masse en g des bactéries dans la cuve le n-ième jour

b) $\begin{cases} u_1 = 1{,}2 u_0 - 100 = 1100 \\ u_2 = 1{,}2 u_1 - 100 = 1220 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u_1 - u_0 = 100 \\ u_2 - u_1 = 120 \end{cases} \neq$

$\begin{cases} \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1100}{1000} = 1{,}1 \\ \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1220}{1100} = \dfrac{61}{55} \neq 1{,}1 \end{cases}$

(u_n) n'est ni arithmétique, ni géométique

1,5

c) $30 \text{ kg} = 30\,000 \text{ g}$

on veut résoudre $u_n \geqslant 30\,000$

1

$\begin{cases} u_{22} < 30\,000 \\ u_{23} > 30\,000 \end{cases}$ Au Bout de 23 jours la masse dépasse 30 kg

d) $u \leftarrow 1000$

$n \leftarrow 0$

Tant que $u < 30\,000$

$u \leftarrow 1{,}2u - 100$

$n \leftarrow n + 1$

1

fintantque

Afficher n

2) $\boxed{v_n = u_n - 500}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 500$

$= (1{,}2u_n - 100) - 500$

$= 1{,}2u_n - 600$

2

$= 1{,}2(v_n + 500) - 600$

$= 1{,}2\,v_n$ $(n \in \mathbb{N})$

et $v_0 = u_0 - 500 = 500$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2 de terme initial $v_0 = 500$

b) $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1{,}2^n$

1

et $u_n = v_n + 500 \iff \boxed{u_n = 500 \times 1{,}2^n + 500}$

$(n \in \mathbb{N})$

c) D'après la calculatrice il semble que u_n tende vers $+\infty$ plus n devient grand.

9,5