1) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 3n \\ u_0 = 2 \end{cases}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

ⓐ (u_n) est definie par une relation de récurrence 0,5

ⓑ $\begin{cases} u_1 = u_0^2 + u_0 + 3\times 0 = 4+2+0 = 6 \\ u_2 = u_1^2 + u_1 + 3\times 1 = 36+6+3 = 45 \end{cases}$ 1

ⓒ $\begin{cases} u_1 - u_0 = 6-2 = 4 \\ u_2 - u_1 = 45-6 = 39 \end{cases} \neq$ $\quad \begin{cases} \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{45}{6} = \dfrac{15}{2} = 7{,}5 \end{cases} \neq$

Donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique. 1,25

ⓓ $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 3n$ $\quad$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

$u_n^2 \geq 0$ et $3n \geq 0$ $\quad \Longleftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$ 0,75

(u_n) est croissante

---

2) $u_n = 3 - 2n$ $(n \in \mathbb{N})$ on reconnait $u_n = u_0 + n \times r$

(u_n) est une suite arithmétique de raison (-2) de terme initial $u_0 = 3$ 0,75

---

3) (u_n) suite arithmétique de raison 3 de premier terme $u_0 = 5$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

ⓐ $u_n = u_0 + n \times r \Longleftrightarrow \boxed{u_n = 5 + 3n}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ 0,5

ⓑ $u_{10} = 5 + 3 \times 10 = 35$ 0,5

ⓒ $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = \dfrac{(u_0 + u_{10}) \times 11}{2} = \dfrac{40 \times 11}{2} = 220$ 1

---

4) (u_n) suite géométrique de premier terme $u_1 = 3$ de raison $q = -2$

ⓐ $u_n = u_1 \times q^{n-1} \Longleftrightarrow \boxed{u_n = 3 \times (-2)^{n-1}}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$ 1

ⓑ $u_5 = 3 \times (-2)^{5-1} = 3 \times (-2)^4 = 3 \times 16 = 48$ 0,5

5) (u_n) est arithmétique de raison r.

$$\begin{cases} u_4 = 7 \\ u_9 = 9 \end{cases}$$

$$u_9 = u_4 + 5 \times r$$
$$\iff 9 = 7 + 5r$$
$$\iff 2 = 5r$$
$$\iff r = \frac{2}{5}$$

1,5

La raison est $\frac{2}{5}$

---

6) <u>Bonus</u> $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 99$

on reconnait (u_n) suite arithmétique de raison 2 de 1er terme $u_0 = 1$

Donc $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$ $\quad u_n = 1 + 2n$

$(u_n = 99 \iff 1 + 2n = 99 \iff \underline{n = 49})$

<u>donc</u> $S = \dfrac{(u_0 + u_{49}) \times 50}{2} = \dfrac{100 \times 50}{2} = 2500$