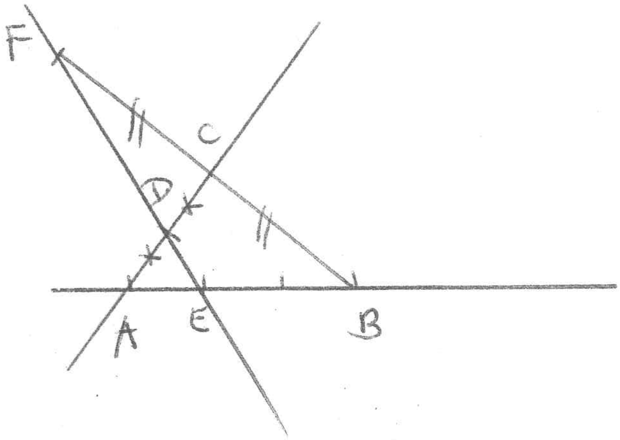
AP – Vecteurs – Droites

Ex 1 : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$



1) Solution vectorielle

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$
$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$
$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
$= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}$
$= -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{DF} = -3\overrightarrow{DE}$
$\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DE}$ colinéaires
donc D, E et F alignés

2) Solution analytique : dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

a) $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(0;1)$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $D(0;\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $E(\frac{1}{3};0)$

$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC} \iff \begin{cases} x_F - 1 = 2\times(0-1) \\ y_F - 0 = 2\times(1-0) \end{cases} \iff \begin{cases} x_F = -1 \\ y_F = 2 \end{cases}$

$F(-1;2)$

b) $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -4/3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{1}{3}\times 2 - \frac{1}{2}\times\left(\frac{-4}{3}\right)$
$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$

donc $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires
et E, D, F alignés

c) (EF) : $ax + by + c = 0$ de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$

donc $2x + \frac{4}{3}y + c = 0$

$E(\frac{1}{3};0) \in (EF) \iff \frac{2}{3} + 0 + c = 0 \iff c = -\frac{2}{3}$

(EF) a pour équation $2x + \frac{4}{3}y - \frac{2}{3} = 0$

ou encore $\boxed{3x + 2y - 1 = 0}$ (on multiplie par $\frac{3}{2}$)

$D(0;\frac{1}{2})$: $3\times 0 + 2\times\frac{1}{2} - 1 = 0$ équation vérifiée donc $\boxed{D \in (EF)}$

Ex2 : 1) $A(-2;1)$ $B(1;2)$ $C(7;4)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc A, B et C sont alignés

$A'(0;-2)$ $B'(1;-2)$ $C'(5;-2)$

$\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A'C'}=5\overrightarrow{A'B'}$

$\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires donc A', B', C' sont alignés.

2) a) $\overrightarrow{AC'}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ donc $(AC') : 3x+7y+c=0$

$A(-2;1)\in(AC') \iff -6+7+c=0$
$\iff c=-1$

Donc $\boxed{(AC') : 3x+7y-1=0}$ équation cartésienne

$\overrightarrow{A'C}\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}$ donc $(A'C) : 6x-7y+c=0$

$A'(0;-2)\in(A'C) \iff 0+14+c=0$
$\iff c=-14$

donc $\boxed{(A'C) : 6x-7y-14=0}$ éq cartésienne

b) Le couple de coordonnées de E intersection de (A'C) et (AC') est solution du système :

$$\begin{cases} 3x+7y-1=0 & (L_1)\\ 6x-7y-14=0 & (L_2)\end{cases} \iff \begin{cases} 3x+7y-1=0 \\ 9x-15=0 & (L_1)+(L_2)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=\frac{-4}{7}\\ x=\frac{5}{3}\end{cases}$$ donc $\boxed{E\left(5/3\,;-\frac{4}{7}\right)}$

3) $\overrightarrow{B'C}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$ $(B'C) : x-y+c=0$

$B'(1;-2)\in(B'C) \iff 1+2+c=0 \iff c=-3$

donc $\boxed{(B'C) : x-y-3=0}$

$\overrightarrow{BC'}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ $(BC') : x+y+c=0$

$B(1;2)\in(BC') \iff 1+2+c=0 \iff c=-3$

donc $\boxed{(BC') : x+y-3=0}$

$$\begin{cases} x-y-3=0 & (L_1)\\ x+y-3=0 & (L_2)\end{cases} \iff \begin{cases} 2x-6=0 & L_1+L_2\\ x+y-3=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=3\\ y=0\end{cases}$$

donc $\boxed{F(3;0)}$

4) $\boxed{D\left(\frac{1}{5} ; \frac{-6}{5}\right)}$

$\overrightarrow{AB'}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\frac{11}{5}\\-\frac{11}{5}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires donc $\underline{D \in (AB')}$

$\overrightarrow{A'B}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A'D}\begin{pmatrix}1/5\\4/5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{A'D}$ colinéaires donc $\underline{D \in (A'B)}$

5) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}22/15\\22/35\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}14/5\\6/5\end{pmatrix}$

$$\frac{22}{15}\times\frac{6}{5} - \frac{22}{35}\times\frac{14}{5}$$
$$= \frac{22\times\cancel{3}\times2}{\cancel{3}\times5\times5} - \frac{22\times\cancel{7}\times2}{\cancel{7}\times5\times5} = 0$$

$\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires
donc $\underline{D, E \text{ et } F \text{ alignés}}$