Exercices de Révision - 1S

Ex1 : $3x^2 - 5x + 1 = 0 \quad S = \left\{\frac{5-\sqrt{13}}{6} ; \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right\}$

$2x^2 - 4 = 0 \quad S = \{-2 ; 2\}$

Ex2 : $x^2 - 3x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) > 0$

$S =]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

$2x^2 - x \geq (x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 \geq 0$

$S = \left]-\infty ; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2} ; +\infty\right[$

Ex3 : $\frac{x^2 - 3x + 2}{x+2} \leq 0 \quad S =]-\infty ; -2[\cup [1 ; 2]$

Ex4 : $f(x) = -2x^2 + x + 1$

$\frac{-1}{2 \times (-2)} = \frac{1}{4} \quad a = -2$, $a < 0$

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$9/8$	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = 1 \rightarrow \mathcal{C}_f$ coupe (Oy) en $A(0 ; 1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$ ou $x = 1$ $\quad \mathcal{C}_f$ coupe (Ox) en $I(1 ; 0)$ et $J(-1/2 ; 0)$

Ex5 : $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(\underbrace{2x^2 - 2x + 1}_{\Delta < 0}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \quad S = \{1\}$

Ex6 : 1) $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{2} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad$ somme ou polynôme de degré 2

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

2) $f(x) = \frac{3}{x^2+1} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad$ quotient $x^2+1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$

$\boxed{f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}} \quad f = \frac{1}{v} \quad f' = \frac{-v'}{v^2}$

3) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\quad$ quotient $x - 2 \neq 0$ pour $x \neq 2$

$f = \frac{u}{v} \quad f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\boxed{f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}}$

Ex7 : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution

Ex8 : $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ définie dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = \dfrac{-6}{x^3}$

$T : y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$f'(1) = -6$ et $f(1) = 3$

donc $T : y = -6(x-1) + 3$

$\boxed{y = -6x + 9}$

tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Ex9 : $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse (-2)

$f'(-2) = 9$ $\quad$ $f'(0) = -3$ $\quad$ $f'(2) = 9$

$f'(-1) = f'(1) = 0$ (extremum locaux)

Ex10 : D : « la pièce est défectueuse » $p(D) = 0{,}01$

1) Schéma de Bernoulli de paramètres 10 et 0,01

la variable aléatoire X qui compte le nombre de pièces défectueuses suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}01)$

$p(X=0) = (1 - 0{,}01)^{10} = 0{,}99^{10} \approx 0{,}9044$

aucune pièce défectueuse

2) $p(X \leq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0{,}99^{10} \approx 0{,}0956$

Ex 11 : on répète 12 fois la même expérience de Bernoulli de façon successive et indépendante.
2 issues possibles D : « la composition est défectueuse » et $\overline{D}$ son contraire. $p(D) = p = 0,025$
X qui comptabilise le nombre de compositions défectueuses suit la loi binomiale $B(12 ; 0,025)$

$$p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1)$$
$$= (1-0,025)^{12} + 12 \times 0,025 \times (1-0,025)^{11}$$
$$\approx 0,965$$
au plus une composition défectueuse.

Ex 12 : ... loi binomiale $B(100 ; 0,85)$
On trouve $J = [0,78 ; 0,92]$ intervalle de fluctuation

fréquence observée : $\frac{25+32+12}{100} = \frac{69}{100} = 0,69 = f$
$f \notin J$ donc la fréquence observée n'est pas compatible avec le fonctionnement correct de la machine

---

Ex 13 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique de raison r
$u_9 = u_1 + 8 \times r \Leftrightarrow 33 = 3 + 8r \Leftrightarrow r = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$
$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = \frac{(u_0 + u_{10}) \times 11}{2} = \frac{(u_1 + u_9) \times 11}{2}$
$\begin{cases} u_0 = u_1 - r \\ u_{10} = u_9 + r \end{cases}$ $= \frac{(3+33) \times 11}{2} = 198$

Ex 14 : $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 59\,049$ termes d'une suite géométrique de raison 3
$$= \frac{1 - 59\,049 \times 3}{1 - 3} = 88573$$

Ex 15 : $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $u_n = f(n)$

- $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$ définie dérivable sur $[0 ; +\infty[$

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ $f'(x) < 0$ donc f est décroissante
alors (u_n) est décroissante pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(2 + \frac{1}{n+2}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

$-1 < 0$, $(n+2)(n+1) > 0$ } donc $u_{n+1} - u_n < 0$
$u_{n+1} < u_n$ $\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$

Ex16 : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

1) $u_0 = 3 \quad u_1 = \frac{7}{2} = 3{,}5 \quad u_2 = 3{,}625 \quad u_3 = 3{,}65625 \ldots$
$v_0 = 4 \quad v_1 = 3{,}75 \quad v_2 = 3{,}6875 \quad v_3 = 3{,}671875 \ldots$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante
Les 2 suites semblent converger vers la même limite

2) $w_n = v_n - u_n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$$

$$= \left(\frac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - u_n) = \frac{1}{4} w_n$$

donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/4$ de 1er terme $w_0 = 1$ $\quad (v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1)$

Alors $\boxed{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n} \; (n \in \mathbb{N})$

3) $w_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{v_n > u_n}$

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2u_n}{2} = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{w_n}{2}$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante pour $n \in \mathbb{N}$

- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} - \dfrac{2v_n}{2} = \dfrac{u_{n+1} - v_n}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right) = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = -\frac{1}{4} w_n$$

$v_{n+1} - v_n < 0$ donc (v_n) décroissante pour $n \in \mathbb{N}$

4) $-1 < 0{,}25 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} (0{,}25)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

Alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n}$

Ex 17 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		$+\infty$
$g(x)=\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

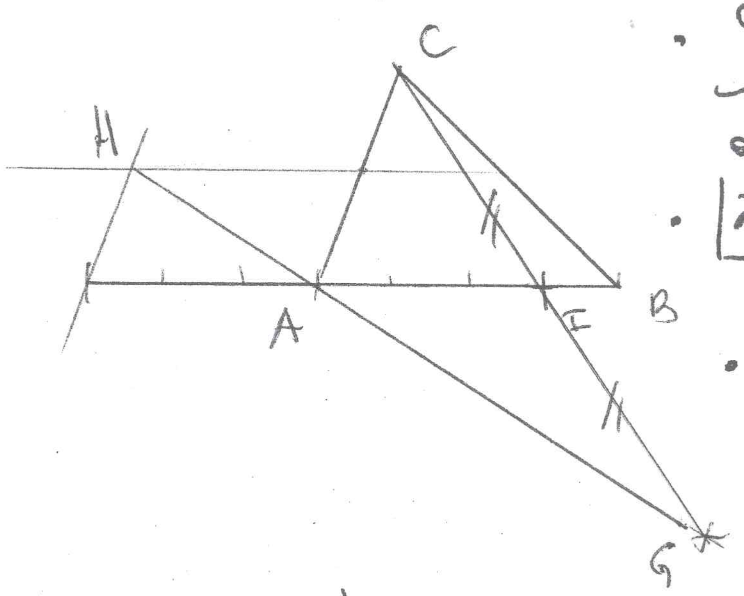
$1 < x < 3 \iff -6 < x-5 < -2 \iff 36 > (x-5)^2 > 4$

$\iff \underline{38 > (x-5)^2 + 2 > 6}$

$1 < x < 3 \iff -2 > -2x > -6 \iff 4 > 6-2x > 0$

$\iff \underline{2 > \sqrt{6-2x} > 0}$

Ex 18 :



- $\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AB}$
- G symétrique de C par rapport à I $\iff$ I milieu de [GC] $\iff$ $\vec{IG} = \vec{CI}$
- $\boxed{\vec{AH} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}}$
- $\vec{AG} = \vec{AI} + \vec{IG}$

$= \frac{3}{4}\vec{AB} + \vec{CI}$

$= \frac{3}{4}\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{AI}$

$= \boxed{\frac{3}{2}\vec{AB} - \vec{AC}}$

$\vec{AG} = -2\vec{AH}$

$\vec{AG}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires

donc A, G et H sont alignés

Ex 19 : Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$

$A(0;0)$ 1) I milieu de [AB] donc $\boxed{I\left(\frac{1}{2};0\right)}$

$B(1;0)$ 2) J milieu de [CD] donc $\boxed{J\left(\frac{a}{2};\frac{b+1}{2}\right)}$

$D(0;1)$ $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AD}$ donc $\boxed{M\left(0;\frac{2}{3}\right)}$

$C(a;b)$ $\vec{IN} = \frac{2}{3}\vec{IJ} \iff \begin{cases} x_N - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{a-1}{2} = \frac{a-1}{3} \\ y_N = \frac{2}{3} \times \frac{b+1}{2} = \frac{b+1}{3} \end{cases}$

donc $\boxed{N\left(\frac{2a+1}{6};\frac{b+1}{3}\right)}$

$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{Bc} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_P - 1 = \frac{2}{3}(a-1) \\ y_P = \frac{2}{3}b \end{cases}$ donc $\boxed{P\left(\frac{2a+1}{3} ; \frac{2b}{3}\right)}$

ⓑ $\begin{cases} \dfrac{x_M + x_P}{2} = \dfrac{0 + \frac{2a+1}{3}}{2} = \dfrac{2a+1}{6} = x_N \\ \dfrac{y_M + y_P}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{2b}{3}}{2} = \dfrac{1+b}{3} = y_N \end{cases}$ donc $\boxed{N \text{ milieu de } [MP]}$

2) ⓐ $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_Q - a = \frac{1}{3}\times(-a) \\ y_Q - b = \frac{1}{3}\times(-b) \end{cases}$ donc $\boxed{Q\left(\frac{2a}{3} ; \frac{2b}{3}\right)}$

$\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_R = \frac{1}{3}\times 1 \\ y_R - 1 = \frac{1}{3}\times(-1) \end{cases}$ donc $\boxed{R\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)}$

ⓑ $\begin{cases} \dfrac{x_P + x_R}{2} = \dfrac{\frac{2a}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{2a+1}{6} = x_N \\ \dfrac{y_Q + y_R}{2} = \dfrac{\frac{2b}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{b+1}{3} = y_N \end{cases}$ donc $\boxed{N \text{ milieu de } [RQ]}$

3) S milieu de $[IC]$ donc $\boxed{S\left(\frac{2a+1}{4} ; \frac{b}{2}\right)}$

ⓐ $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix} \frac{2a+1}{6} \\ \frac{b-2}{3} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DS}\begin{pmatrix} \frac{2a+1}{4} \\ \frac{b-2}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont colinéaires et $\underline{D, N, S \text{ alignés}}$

$\frac{2a+1}{6}\times\frac{b-2}{2} - \frac{2a+1}{4}\times\frac{b-2}{3} = 0$

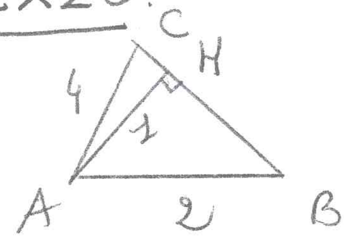
ⓑ Dans le triangle CDI

$\begin{cases} S \text{ milieu de } [IC] \text{ donc } (DS) \text{ médiane issue de } D \\ J \text{ milieu de } [CD] \text{ donc } (IJ) \text{ médiane issue de } I \end{cases}$

Elles se coupent en N

donc <u>N est le centre de gravité du triangle</u>

Ex20 :



1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$

$= AH^2 + \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$

$\left.\begin{array}{l}(AH)\perp(HC)\\(AH)\perp(HB)\end{array}\right\}$ donc $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH} = 0$

$\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ colinéaires de sens contraires donc $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = -HB\times HC$

d'après le théorème de Pythagore dans AHC et AHB rectangles en H :

$AH^2+CH^2 = AC^2$ | $AH^2+HB^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow 1+CH^2 = 16$ | $\Leftrightarrow 1+HB^2 = 4$

$\Leftrightarrow CH^2 = 15$ | $\Leftrightarrow HB^2 = 3$

$\Leftrightarrow CH = \sqrt{15}$ | $\Leftrightarrow HB = \sqrt{3}$

Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH^2 - HB\times HC = 1-\sqrt{15}\sqrt{3}$

$= 1-\sqrt{45} = 1-3\sqrt{5}$

2) $\|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\|^2 = 9AB^2 + 6\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 4AC^2$

$= 36 + 6(1-3\sqrt{5}) + 64$

$= \boxed{106 - 18\sqrt{5}}$

Ex21 : 1) $AB = AE = a$; $AC = AF = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$

$\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = \alpha + \frac{\pi}{2}$

- $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} = AE\times AC\times\cos(\widehat{EAC})$

$= \boxed{-ab\sin\alpha}$

$\widehat{BAF} = \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = \alpha + \pi/2$

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = AB\times AF\times\cos(\widehat{BAF})$

$= \boxed{-ab\sin\alpha}$

Donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

2) I milieu de $[BC]$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF})$

$= \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}}_{0} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EA} + \underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}}_{0})$

(AB)⊥(EA) (AC)⊥(AF)

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}) = 0$

donc $\boxed{(AI)\perp(EF)}$

Ex22 : $A(-1;-2)$ 1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$
$B(2;4)$
$C(6;2)$

$$\begin{cases}\vec{AB}\cdot\vec{AC}=21+24=45\\ \vec{AB}\cdot\vec{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}\\ \qquad =\sqrt{45}\times\sqrt{65}\cos\widehat{BAC}\end{cases}$$

$AB^2=9+36=45$
$AC^2=49+16=65$

Donc $\sqrt{45}\times\sqrt{65}\cos\widehat{BAC}=45$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{65}}=\sqrt{\frac{5\times 9}{5\times 13}}=\sqrt{\frac{9}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

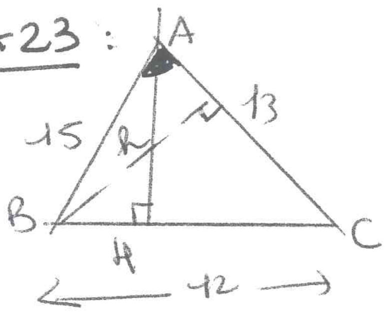
alors $\boxed{\widehat{BAC}\approx 33{,}7°}$

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ $\vec{CB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\cdot\vec{CB}=3\times(-4)+6\times 2=0$

donc $(AB)\perp(CB)$

<u>ABC est un triangle rectangle en B</u>

Ex23 :



1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$
$=\frac{1}{2}(225+169-144)$
$=125$

or $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$
$=15\times 13\times\cos\widehat{BAC}$

donc $195\cos\widehat{BAC}=125$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos\widehat{BAC}}=\frac{125}{195}=\frac{5\times 25}{5\times 39}=\frac{25}{39}$$

$\cos^2\widehat{BAC}+\sin^2\widehat{BAC}=1 \Leftrightarrow \sin^2\widehat{BAC}=1-\left(\frac{25}{39}\right)^2=\frac{896}{39^2}$

$\sin\widehat{BAC}>0$ donc $\boxed{\sin\widehat{BAC}=\frac{8\sqrt{14}}{39}}$ $\left(=\frac{h}{AB}\right)$

2) $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{h\times AC}{2}=\frac{AB\sin\widehat{BAC}\times AC}{2}$

$$=\frac{15\times 13\times\frac{8\sqrt{14}}{39}}{2}=\frac{15\times\cancel{13}\times 4\times 2\sqrt{14}}{2\times\cancel{13}\times 3}=20\sqrt{14}$$

or $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{BC\times AH}{2}=\frac{12AH}{2}=6AH$

Donc $6AH=20\sqrt{14}$

$$\Leftrightarrow \boxed{AH=\frac{10\sqrt{14}}{3}}$$

Ex 24 : $\mathcal{D} : 3x - y + 5 = 0$ $\quad A(-1;3)$

1) $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D}_1 : 3x - y + c = 0$

$A \in \mathcal{D}_1 \iff -3 - 3 + c = 0 \iff c = 6$

Alors $\boxed{\mathcal{D}_1 : 3x - y + 6 = 0}$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{D}$ donc vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ $\quad (\mathcal{D}_2 \perp \mathcal{D})$

alors $\mathcal{D}_2 : x + 3y + c = 0$

$A \in \mathcal{D}_2 \iff -1 + 9 + c = 0 \iff c = -8$

donc $\boxed{\mathcal{D}_2 : x + 3y - 8 = 0}$

Ex 25 : $A(4;0)$ $\quad B(1;1)$

1) Soit I milieu de $[OA]$ et soit J milieu de $[OB]$

$\boxed{I(2;0)}$ $\quad \boxed{J(1/2 ; 1/2)}$

(d) médiatrice de $[OA]$ alors $(d) \perp (OA)$ et $I \in (d)$

$(d) : \boxed{x = 2}$

(d') médiatrice de $[OB]$ donc $(d') \perp (OB)$ et $J \in (d')$

$(d') : x + y + c = 0$ $\quad J \in (d') \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c = 0$

$\iff c = -1$

Donc $\boxed{(d') : x + y - 1 = 0}$

Le centre Ω du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle OAB est l'intersection de (d) et (d')

$\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ $\quad \boxed{\Omega(2;-1)}$

Son rayon est $\boxed{O\Omega = \sqrt{5}}$

alors $\mathcal{C}$ a pour équation

$\boxed{(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5}$ ou $\boxed{x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0}$

2) $A' \in \mathcal{C} \cap (Oy)$ donc $A'(0; y_{A'})$ $\quad y_{A'} \neq 0$

avec $y_{A'}^2 + 2y_{A'} = 0 \iff y_{A'}(y_{A'} + 2) = 0$

$\iff \cancel{y_{A'} = 0}$ ou $y_{A'} = -2$

Donc $\boxed{A'(0;-2)}$

3) T_A tangente à $\mathcal{C}$ en A $\iff (A\Omega) \perp T_A$ et $A \in T_A$

$\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ $T_A : -2x - y + c = 0$

$A(4;0) \in T_A \iff -8 + c = 0 \iff c = 8$

donc $\boxed{T_A : -2x - y + 8 = 0}$ ou $\boxed{2x + y - 8 = 0}$

$T_{A'}$ tangente à $\mathcal{C}$ en A'

$\overrightarrow{A'\Omega}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $T_{A'} : 2x + y + c = 0$

$A'(0;-2) \in T_{A'} \iff -2 + c = 0 \iff c = 2$

donc $\boxed{T_{A'} : 2x + y + 2 = 0}$ $\overrightarrow{A\Omega} = -\overrightarrow{A'\Omega}$

les vecteurs normaux sont colinéaires

donc $\boxed{T_A \parallel T_{A'}}$

Ex26 : $AB = 2$

1) $\mathcal{E}_1 = \{M / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -2\}$ Soit K le projeté orthogonal de M sur (AB)

$M \in \mathcal{E}_1 \iff \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$ → $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires de sens contraires car $-2 < 0$

$\iff -AK \times AB = -2$

$\iff AK \times 2 = 2$

$\iff AK = 1$

$\mathcal{E}_1$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par K

2) $\mathcal{E}_2 = \{M / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1\}$ soit I milieu de [AB]

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA})$ et $IA = \frac{1}{2} AB = 1$

$= MI^2 - IA^2$

$= MI^2 - 1$

donc $M \in \mathcal{E}_2 \iff MI^2 - 1 = 1 \iff MI^2 = 2 \iff IM = \sqrt{2}$

$\mathcal{E}_2$ est le cercle de centre I de rayon $\sqrt{2}$.

Ex 27 : AB = 5 cm

1) $\mathcal{E} = \{M / MA^2 - MB^2 = 20\}$ Soit I milieu de [AB]

$\boxed{MA^2 - MB^2} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$= \cancel{MI^2} + 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + IA^2 - \cancel{MI^2} - 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} - IB^2$

$IA = IB$

$= 2\,\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})$

$= 2\,\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI})$

$= 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} = \boxed{2\,\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}}$

Soit H le projeté orthogonale de M sur (AB)

alors $M \in \mathcal{E} \iff 2\,\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB} = 20$

$\iff \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB} = 10$ $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires de même sens car $20 > 0$

$\iff IH \times AB = 10$

$\iff \boxed{IH = 2}$ car AB = 5 cm

$\mathcal{E}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

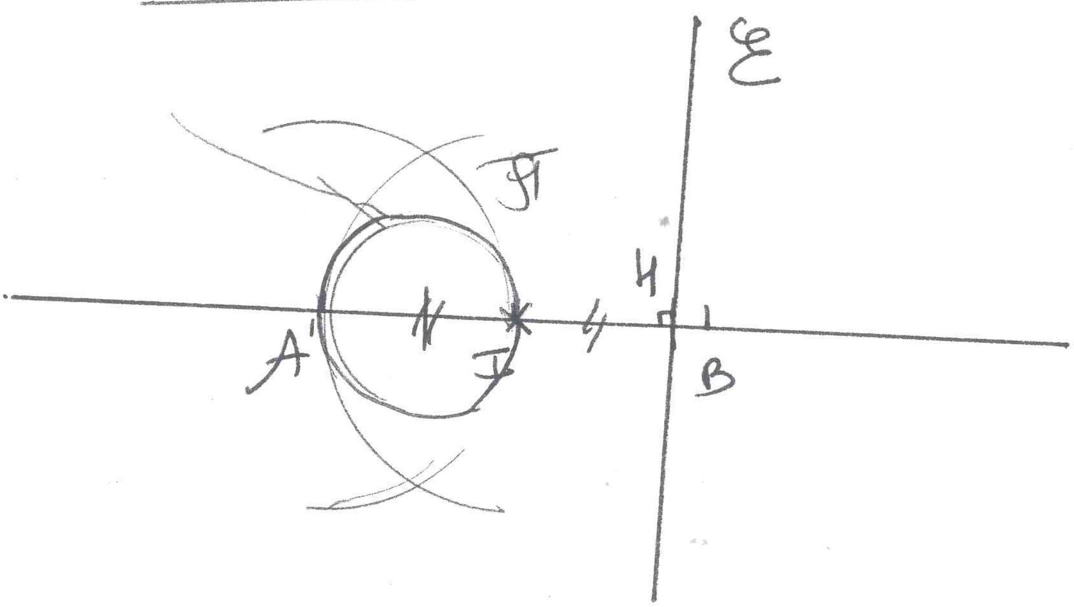
2) $\mathcal{F} = \{M / (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA} = 0\}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$

donc $M \in \mathcal{F} \iff 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA} = 0 \iff \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$

$\iff \boxed{(MI) \perp (MA)}$

$\mathcal{F}$ est le cercle diamètre [IA]



Ex 28. 1) dans $[-\pi ; \pi]$ $\quad 1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$

$\iff \cos\left(\pi/3 - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

$-\pi \leq x \leq \pi \iff -\pi \leq -x \leq \pi \iff -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} - x \leq \frac{4\pi}{3}$

(*) $\frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{3} - x = \frac{-\pi}{4}$

$\iff -x = -\pi/12$ ou $-x = \frac{-7\pi}{12}$ $\qquad S = \left\{\pi/12 ; \frac{7\pi}{12}\right\}$

$\iff x = \pi/12$ ou $x = \frac{7\pi}{12}$

2) dans $[-\pi ; \pi]$ $\quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - (2x - \pi/6)\right) = \cos\left(\pi/4 - x\right)$

$\iff \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(\pi/4 - x\right)$

$\iff \frac{2\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $\frac{2\pi}{3} - 2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k'\pi$

$\iff -x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $-3x = -\frac{11\pi}{12} + 2k'\pi$

$\iff x = \frac{5\pi}{12} - 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{36} - \frac{2k'\pi}{3}$ $\quad (k, k' \in \mathbb{Z})$

$S = \left\{\frac{5\pi}{12} ; \frac{11\pi}{36} ; \frac{35\pi}{36} ; \frac{-13\pi}{36}\right\}$

3) dans $[0 ; 2\pi[$ $\quad 2\sin x + \sqrt{3} > 0$

$\iff \sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad S = \left[0 ; \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right[$

4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi[$

$0 \leq x < 2\pi \iff 0 \leq 2x < 4\pi \iff -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{11\pi}{3}$

$S = \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3} ; \frac{7\pi}{3}\right]$

5) $\cos(3x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ sur $]-\pi ; \pi]$

$\iff \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x - \pi/4)\right)$ $\qquad k, k' \in \mathbb{Z}$

$\iff \cos(3x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$

$\iff 3x = \frac{3\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $3x = x - \frac{3\pi}{4} + 2k'\pi$

$\iff 4x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi$

$\iff x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{-3\pi}{8} + k'\pi$

$S = \left\{\frac{3\pi}{16} ; \frac{11\pi}{16} ; \frac{-5\pi}{16} ; \frac{-13\pi}{16} ; \frac{-3\pi}{8} ; \frac{5\pi}{8}\right\}$

6) dans $\mathbb{R}$ ⓐ $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3}\right]$

$= 2\cos x \times \frac{1}{2} + 2\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \underline{\cos x + \sqrt{3}\sin x}$

ⓑ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -2 \iff 2\cos(x - \pi/3) = -2$

$\iff \underline{\cos(x - \pi/3) = -1}$

ⓒ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -2 \iff \cos(x - \pi/3) = -1$

$\iff x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \iff x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \qquad \underline{S = \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi\right\}_{k' \in \mathbb{Z}}}$

Ex 29 : $\sin a = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad a \in [0; \pi/2]$

1) $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

$= 1 - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{4}{4} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\sin^2(2a) = 1 - \cos^2(2a) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right)$

$= \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \qquad 2a \in [0;\pi]$ donc $\sin 2a > 0$

alors $\boxed{\sin 2a = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

2) $\underline{\cos(4a)} = \cos(2 \times 2a) = 2\cos^2(2a) - 1 = 2 \times \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right) - 1$

$= \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \underline{\sin a}$

3) $\cos 4a = \sin a \iff \cos 4a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

$\iff 4a = \frac{\pi}{2} - a + 2k\pi$ ou $4a = a - \pi/2 + 2k'\pi$

$a \in [0; \pi/2]$

$\iff 5a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $3a = -\pi/2 + 2k'\pi$

$\iff a = \pi/10 + \frac{2k\pi}{5}$ ou $a = \cancel{-\frac{\pi}{6} + \frac{2k'\pi}{3}}$

$S = \{\pi/10\}$

$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{10} = \pi/2$ impossible

$k' = 1 \to a = \pi/2$

$\sin \pi/2 = 1$

Ex 30 : 1) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ $\qquad x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos x \geqslant 0$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$= 1 - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x = 2 \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{4-3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$2x \in [0 ; \pi]$ alors $2x = \dfrac{5\pi}{6}$ et $x = \dfrac{5\pi}{12}$

2) $$\boxed{3 + \cos 2x} = 3 + \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 3 \cdot \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} + \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \boxed{4\cos^2 x + 2\sin^2 x}$$

3) $$\underline{A(x)} = \sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$$
$$= \sin(3x - x) = \sin 2x = \underline{2\sin x \cos x}$$

alors $$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\cos x \sin 3x - \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x}$$
$$= \frac{A(x)}{\sin x \cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$$