1S - AP - Fonctions

Exercice 1

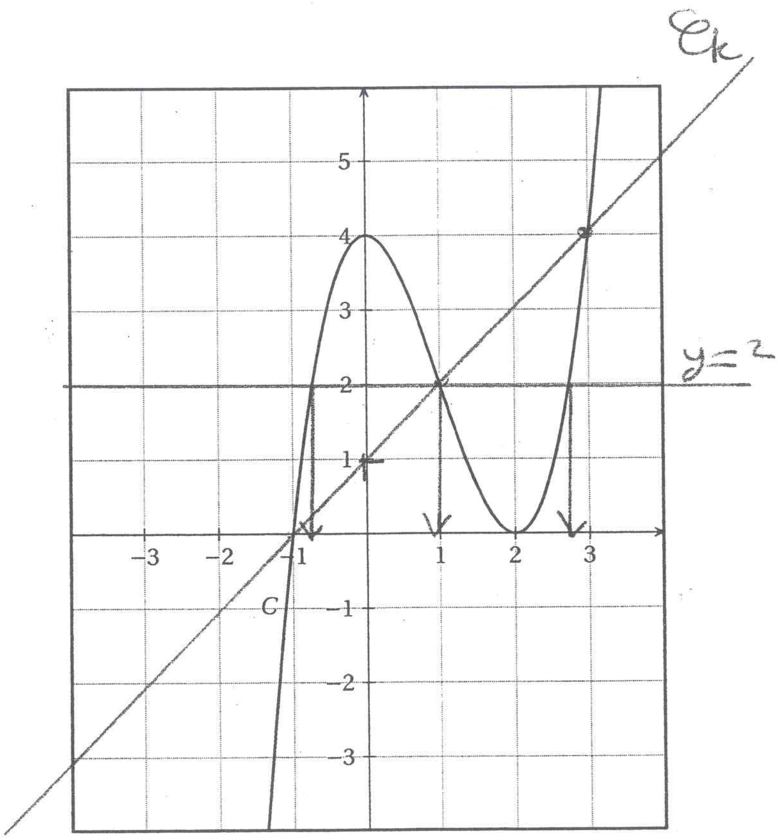
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal ci-joint.

Partie A : Lecture graphique

1. Résoudre $f(x) = 2$
2. Résoudre $f(x) > 0$
3. Quelle est l'image de 0 ?
4. Déterminer les antécédents de 0.
5. Dresser le tableau de variations de f

Partie B : Par le calcul

1. Soit k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x + 1$.
   (a) Quelle est la nature de k ? Représentez k sur le graphique. On note $\mathscr{C}_k$ sa représentation graphique.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$f(x) - k(x) = (x-3)(x^2-1)$$
   (c) En déduire le signe de $f(x) - k(x)$.
   (d) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_k$ et vérifier la cohérence de votre résultat avec le graphique.
2. Montrer que sur $]-\infty; 3]$, le maximum de f est 4.



AP - Fonctions -

Ex1 : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow \mathcal{C}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(A) graphiquement

1) l'équation $f(x)=2$ a pour solutions les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y=2$

on lit environ $S = \{-0{,}8 ; 1 ; 2{,}7\}$

2) les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les abscisses de $\mathcal{C}$ situés ~~strictement~~ au-dessus de l'axe ~~des~~ abscisses

on lit $S =]-1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

3) l'image de 0 par f est 4

4) les antécédents de 0 par f sont -1 et 2

5)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(+\infty)$

(B) Algébriquement

1) $k(x) = x+1$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

(a) k est une fonction affine
$\mathcal{C}_k$ est une droite d'équation $y = x+1$

(b) $\begin{cases} f(x) - k(x) = (x^3 - 3x^2 + 4) - (x+1) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \\ (x-3)(x^2-1) = x^3 - x - 3x^2 + 3 \end{cases}$

donc $\underline{f(x) - k(x) = (x-3)(x^2-1)}$

(c)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\underset{a=1}{x^2-1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)-k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

du signe de a à l'extérieur des racines

(d) • $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_k$ se coupent en 3 points d'abscisses -1, 1 et 3 $\rightarrow A(-1;0)$, $B(1;2)$ et $C(3;4)$

• $f(x) > k(x)$ sur $]-1;1[\cup]3;+\infty[$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_k$

• $f(x) < k(x)$ sur $]-\infty;-1[\cup]1;3[$: $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_k$

2) on veut montrer que 4 est le maximum de f sur $]-\infty;3]$:

$f(0)=4$ et $f(3)=4$

$f(x)-4 = x^3-3x^2$ $\qquad$ $x^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$

$= x^2(x-3)$ $\qquad$ $x \leq 3 \iff x-3 \leq 0$

donc $f(x)-4 \leq 0$

soit $f(x) \leq 4$ alors 4 est le maximum de f sur $]-\infty;3]$ atteint pour $x=0$ et pour $x=3$

Ex3 : $f(x)=(x+1)^2-5$ $\qquad$ $D_f=\mathbb{R}$

1) $f(1)=2^2-5=-1$ $\qquad$ $f(-3)=(-2)^2-5=-1$

2) ⓐ (E_1) : $f(x)=4 \iff (x+1)^2-5=4$

$\iff (x+1)^2-9=0$

$\iff (x+1+3)(x+1-3)=0$

$\iff (x+4)(x-2)=0$

$\iff x=-4$ ou $x=2$

$S=\{-4;2\}$

ⓑ Les solutions de (E_1) sont les antécédents de 4 par f.

3) ⓐ (E_2) : $f(x)=-5 \iff (x+1)^2=0 \iff x=-1$ $\qquad$ $S=\{-1\}$

ⓑ L'image de -1 par f est -5

Ex4 : $f(x)=x-1-\frac{2}{x}$ $\qquad$ $D_f=[-2;0[\cup]0;+\infty[$

1) graphiquement, les antécédents de 2,5 par f sont $-0,5$ et 4 (abscisses des points d'intersection de C_f et de la droite d'équation $y=2,5$.

2) $m\in\mathbb{R}$. Chercher les antécédents de m par f revient à résoudre $f(x)=m$.
On regarde l'intersection de C_f et de la droite D_m d'équation $y=m$.

si $m<-2$: un antécédent car D_m coupe C_f en un seul point

si $-2\leq m$: 2 antécédents car D_m coupe C_f en 2 points.

3) $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x}$

$(x-2)(x+1) = x^2 + x - 2x - 2 = x^2 - x - 2$

donc $\underline{f(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x}}$ sur $\mathcal{D}f$

4)

x	-2		-1		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\underline{f(x) < 0 \text{ sur } [-2\,;-1[\cup]0\,;2[}$

Cohérent avec le graphique puisque $\mathcal{C}f$ est au-dessous strictement de l'axe des abscisses pour $-2 \leq x < -1$ et $0 < x < 2$.

Exercice 2

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-10; 10]$.

x	-10	-7	0	6	10
Variations de f	0 ↗	2 ↘	-5 ↗	5 ↘	3

1. Compléter par $<$, $>$ ou ? si on ne peut pas savoir :
   $f(1)..<..f(3)$ $\quad$ $f(-9)...?..f(-6)$ $\quad$ $f(7)...>.f(-2)$
   $f(-6)..<..2$ $\quad$ $f(-5)..>..f(-3)$ $\quad$ $f(1)..?...0$
2. Compléter les phrases suivantes :
   (a) Si $-10 \leq a < b \leq -7$ alors ..0..≤ $f(a)$..<..$f(b)$..≤.. 2
   (b) Si $6 \leq a < b \leq 10$ alors 5 ≥ .. $f(a)$...>.$f(b)$...≥ 3

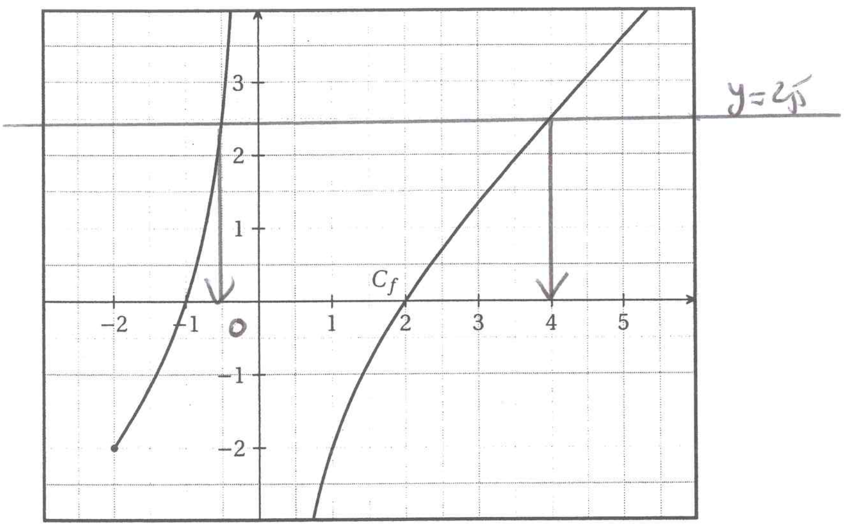
Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 - 5$.

1. Calculer les images de 1 et -3 par f.
2. (a) Résoudre l'équation $(E_1) : f(x) = 4$
   (b) Que représentent les solutions de l'équation (E_1) pour la fonction f ?
3. (a) Résoudre l'équation $(E_2) : f(x) = -5$
   (b) Exprimer le résultat de la question précédente avec une phrase utilisant le mot « image ».

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-2; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x}$.
La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous :



1. Déterminer graphiquement les antécédents de 2,5 par f.
2. Soit m un réel ; discuter graphiquement, le nombre d'antécédents de m suivant les valeurs de m.
3. Démontrer que pour tout x non nul on a

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x}$$

4. Résoudre par le calcul $f(x) < 0$ sur $[-2; 0[\cup]0; +\infty[$ (le résultat est-il cohérent ?)