1S - AP - Equations de cercles

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2;1)$ et $B(2;3)$.

1. Placer ces deux points et tracer la droite (d) d'équation $-x+y+1=0$.
2. Calculer AB.
3. On note $(\mathcal{C})$ le cercle de centre B et de rayon AB. Soit $M(x;y)$ un point du cercle $(\mathcal{C})$; montrer que les coordonnées du point M vérifient l'équation $(x-2)^2+(y-3)^2=20$.

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a,b)$, de rayon R, admet une équation cartésienne de la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

4. Donner l'équation réduite de la droite (d) et déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite (d).
(on pourra refaire l'exercice avec la droite (d') d'équation $-3x+y+13=0$.

Exercice 2 : Réciproquement, **l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2+y^2+ax+by+c=0$, est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.**

1. Dans un repère orthonormal, les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont définis respectivement par les équations :

$$(x-3)^2+(y-2)^2=10 \text{ et } x^2-4x+y^2+2y=15$$

Déterminer le centre et le rayon de chacun des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

2- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Ex 1 : $A(-2;1)$, $B(2;3)$

2) $AB^2=4^2+2^2=20$ $AB=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

3) $M(x;y)\in\mathscr{C}(B;AB)$

$\Leftrightarrow BM=AB \Leftrightarrow BM^2=20$

$\Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=20}$

4) $(d) : y=x-1$

Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} y=x-1 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=20 \end{cases}$$

par substitution

$(x-2)^2+(x-4)^2=20$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+x^2-8x+16=20$

$\Leftrightarrow 2x^2-12x+20=20$

$\Leftrightarrow 2x^2-12x=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-6)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=6$

donc $y=0-1=-1$ ou $y=6-1=5$

(d) coupe $(\mathscr{C})$ en $C(0;-1)$ et en $D(6;5)$

4) (d') : $y = 3x - 13$

$\begin{cases} y = 3x - 13 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20 \end{cases}$

$\rightarrow (x-2)^2 + (3x-16)^2 = 20$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 96x + 256 = 20$

$\Leftrightarrow 10x^2 - 100x + 240 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$

$\Delta = 4 \quad \sqrt{\Delta} = 2$

$\begin{cases} x_1 = \frac{10+2}{2} = 6 \\ x_2 = \frac{10-2}{2} = 4 \end{cases}$

alors $y_1 = 18 - 13 = 3$
et $y_2 = 12 - 13 = -1$

(d') coupe $\mathcal{C}$ en 2 points
E(6 ; 3) et F(4 ; -1)

Ex 2 : 1) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$
est l'équation du cercle $\mathcal{C}_1(I_1 ; \sqrt{10})$
avec $I_1(3 ; 2)$

$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 15$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 15$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 20$ $\qquad \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

équation du cercle $\mathcal{C}_2(I_2 ; 2\sqrt{5})$ avec $I_2(2 ; -1)$

2) Il s'agit de résoudre le système

$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 10 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 4y = -3 & (L_1) \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y = 15 & (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 18 & (L_2) - (L_1) \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - 3y \\ (9-3y)^2 - 4(9-3y) + y^2 + 2y = 15 \quad (*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow 81 - 54y + 9y^2 - 36 + 12y + y^2 + 2y = 15$

$\Leftrightarrow 10y^2 - 40y + 30 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y+3) = 0$

$\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = -3$

Donc $x = 9 - 3 = 6$
ou $x = 9 + 9 = 15$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en A(6 ; 1) et B(15 ; -3)