

Devoir n°9 - Applications du Produit Scalaire - Suites - 1S

28 mars 2014 - 2 h

Exercice 1 (3 pts) : Dans un repère orthonormé du plan, on donne la droite \mathcal{D} d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.

1. Déterminer un vecteur directeur de \mathcal{D} .
2. Déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à \mathcal{D} passant par le point $A(-1;6)$.
3. Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$ avec $B(1;1)$.
4. Justifier que \mathcal{C} et \mathcal{D} sont tangents.

Exercice 2 (6 pts) : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on donne les points $A(2;1)$ et $B(-1;4)$. Pour tout point $M(x; y)$, on pose $h(M) = 2MA^2 + MB^2$.

1. Vérifier que $h(M) = 3(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9)$.
2. On note \mathcal{E}_k l'ensemble des points M tels que $h(M) = k$ où k est un réel donné.
 - a) Montrer que \mathcal{E}_9 est l'ensemble vide.
 - b) Montrer que \mathcal{E}_{27} est le cercle \mathcal{C} de centre $E(1;2)$ de rayon $\sqrt{5}$, puis le tracer.
3. Déterminer une équation du cercle \mathcal{C}' de centre $F(-4;2)$ de rayon $\sqrt{10}$; tracer \mathcal{C}' .
4. Déterminer les coordonnées des points I et J intersections des cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

Exercice 3 (3 pts) : Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 5$.

On cherche à déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 10$.

1. On note I le milieu de $[AB]$; démontrer que $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 5$.
2. Soit H le projeté orthogonal du point M sur (AB) ; montrer que $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow IH = 1$.
En déduire la nature de l'ensemble \mathcal{E} .

Exercice 4 (3 pts) : Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout réel x : $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$
2. On donne $\cos x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et $x \in [-\frac{\pi}{4}; 0]$.
Calculer $\sin x$, puis $\sin 2x$; en déduire la valeur exacte de $2x$, puis celle de x .

Exercice 5 (5 pts) :

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r telle que $u_5 = 13$ et $u_{11} = 31$.
Déterminer u_0 et r .
2. Calculer $S = -5 - 3 - 1 + 1 + \dots + 43 + 45$ en utilisant une suite arithmétique à préciser.
3. Etudier les variations des suites suivantes :
 - a) (u_n) définie par $u_n = \frac{3^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - b) (v_n) définie par $v_0 = -4$ et $v_{n+1} = v_n + n^2 - n + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$.