Correction du devoir n°9 – 1S

Ex 1 : 1) $\mathcal{D} : 2x - 5y + 3 = 0$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 0,5

2) $\Delta \perp \mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est normal à Δ

$\Delta : 5x + 2y + c = 0$ or $A(-1;6) \in \Delta \iff -5 + 12 + c = 0$

$\iff c = -7$

donc $\boxed{\Delta : 5x + 2y - 7 = 0}$ 1

3) $\mathscr{C}$ cercle de diamètre $[AB]$ avec $B(1;1)$

$M \in \mathscr{C} \iff (AM) \perp (BM) \iff \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

$\iff (x+1)(x-1) + (y-6)(y-1) = 0$

$\iff x^2 - 1 + y^2 - 7y + 6 = 0$ /3,5

$\iff \boxed{x^2 + y^2 - 7y + 5 = 0}$ 1

4) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0$ donc $(AB) \perp \mathcal{D}$

de plus $5 \times 1 + 2 \times 1 - 7 = 0$ donc $B \in \mathcal{D}$

Alors <u>$\mathcal{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ en B</u> 1

Ex 2 : 1) $h(M) = 2MA^2 + MB^2$ $\quad A(2;1) \quad B(-1;4) \quad M(x;y)$

• $MA^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$
$= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5$

• $MB^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$
$= x^2 + 2x + y^2 - 8y + 17$

$2MA^2 = 2x^2 - 8x + 2y^2 - 4y + 10$

Donc $h(M) = 3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 27$

$= 3(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9)$ 1

2) a) $M(x;y) \in \mathscr{E}_9 \iff h(M) = 9 \iff x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = 3$

$\iff x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$

$\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 - 4 + 6 = 0$

$\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = -1$ impossible

donc $\mathscr{E}_9 = \emptyset$ 1

b) $M(x;y) \in \mathcal{E}_{27} \iff h(M) = 27$

$\iff x^2+y^2-2x-4y+9=9$

$\iff x^2+y^2-2x-4y=0$

$\iff (x-1)^2+(y-2)^2-5=0$

$\iff \boxed{(x-1)^2+(y-2)^2=5}$ 1

donc $\boxed{\mathcal{E}_{27}=\mathcal{C}(E;\sqrt{5})}$ avec $E(1;2)$

3) $\mathcal{C}'=\mathcal{C}(F;\sqrt{10})$ avec $F(-4;2)$

$M(x;y)\in\mathcal{C}' \iff FM=\sqrt{10} \iff FM^2=10$

$\iff \boxed{(x+4)^2+(y-2)^2=10}$ 0,5

4) Il s'agit de résoudre le système

$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=5 & L_1 \\ (x+4)^2+(y-2)^2=10 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=5 \\ (x+4)^2-(x-1)^2=5 \quad (*) \end{cases}$ L_2-L_1

$(*) \iff \cancel{x^2}+8x+16-\cancel{x^2}+2x-1=5$

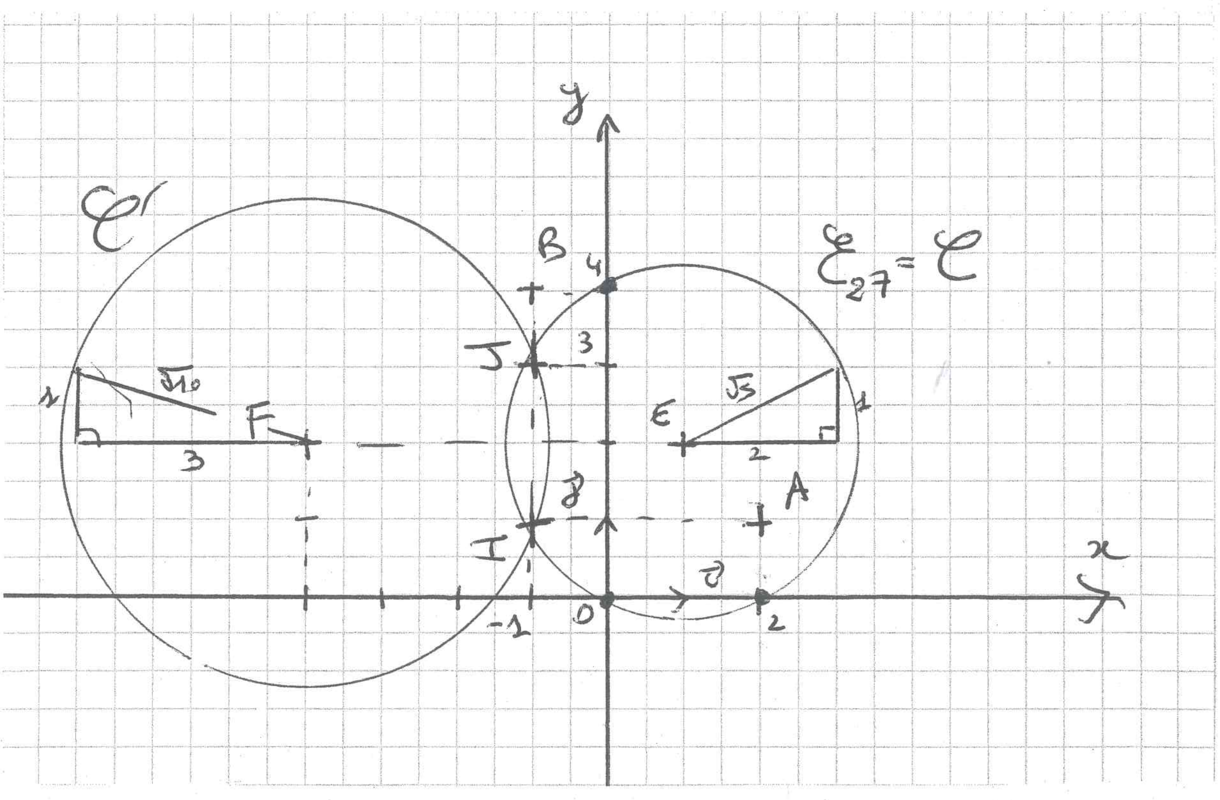
$\iff 10x=-10 \iff x=-1$

En remplaçant dans (L_1), on obtient : $(y-2)^2=1$

$\iff y-2=1$ ou $y-2=-1$

$\iff y=3$ ou $y=1$

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en $I(-1;1)$ et $J(-1;3)$ 1,5



Ex 3 : $AB = 5$ $\quad \mathcal{E} = \{M / MA^2 - MB^2 = 10\}$

1) I milieu de [AB] $\Leftrightarrow \vec{IA} = -\vec{IB}$

$IA = IB$

3

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 10$

$\Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 10$

$\Leftrightarrow MI^2 + 2\vec{MI}\cdot\vec{IA} + \cancel{IA^2} - MI^2 - 2\vec{MI}\cdot\vec{IB} - \cancel{IB^2} = 10$

$\Leftrightarrow 2\vec{MI}\cdot(\vec{IA} - \vec{IB}) = 10$

$\Leftrightarrow \vec{MI}\cdot(\vec{IA} + \vec{BI}) = 5$

$\Leftrightarrow \vec{MI}\cdot\vec{BA} = 5 \Leftrightarrow \vec{IM}\cdot\vec{AB} = 5$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{AB}\cdot\vec{IM} = 5}$ 1,5

2) H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \vec{AB}\cdot\vec{IH} = 5$

$\vec{AB}$ et $\vec{IH}$ colinéaires et de même sens car $5 > 0$

1

donc $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow AB \times IH = 5 \Leftrightarrow 5 \times IH = 5 \Leftrightarrow IH = 1$

Alors $\mathcal{E}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H défini par : $IH = 1$ $\vec{AB}$ et $\vec{IH}$ de même sens 0,5

Ex 4 : 1) $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} \\ \qquad = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3} \\ \qquad = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \end{cases}$$

3,5 0,5

Donc $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 0,5

2) $\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad x \in \left[-\frac{\pi}{4} ; 0\right]$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

1 $\sin x < 0$ donc $\boxed{\sin x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

Alors $\sin 2x = 2\cos x \sin x$

$= -2\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = -\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}{2}$

1 $= -\frac{\sqrt{4-2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

0,5 $2x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ donc $2x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = -\frac{\pi}{8}$

Exs : 1) (u_n) suite arithmétique de raison r
de terme initial u_0

$u_5 = 13$ et $u_{11} = 31$ or $u_{11} = u_5 + 6r$
donc $31 = 13 + 6r$
$18 = 6r$
$r = 3$

$u_5 = u_0 + 5r$
$\Leftrightarrow 13 = u_0 + 15$
$\Leftrightarrow u_0 = -2$

1

2) $S = -5 - 3 - 1 + 1 + 3 + \dots + 43 + 45$ suite arithmétique
de raison 2 de terme initial $v_0 = -5$

$S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ $\quad v_n = 45 = v_0 + n \times r$
$= v_0 + v_1 + \dots + v_{25}$ $\quad \Leftrightarrow 45 = -5 + 2n$
$= \dfrac{(v_0 + v_{25}) \times 26}{2}$ $\quad \Leftrightarrow 50 = 2n$
$\quad \Leftrightarrow n = 25$

$= \dfrac{(-5+45) \times 26}{2} = \dfrac{40 \times 26}{2} = 520$

3) a) $u_n = \dfrac{3^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad u_1 = 3$; $u_2 = \dfrac{9}{2}$; $u_3 = 9$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^{n+1}}{n+1} - \dfrac{3^n}{n} = 3^n\left(\dfrac{3}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right)$

$= 3^n \times \dfrac{3n - (n+1)}{n(n+1)} = 3^n \times \dfrac{2n-1}{n(n+1)}$ $\quad 3^n > 0$

$n \geqslant 1$ donc $\left.\begin{array}{l} n > 0 \\ n+1 > 0 \\ 2n - 1 > 0 \end{array}\right\}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$
(u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$

b) $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + n^2 - n + 3 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v_0 = -4 \\ v_1 = -4 + 3 = -1 \\ v_2 = -1 + 3 = 2 \end{cases}$

$v_{n+1} - v_n = n^2 - n + 3$
Soit $f(x) = x^2 - x + 3$
$\Delta = 1 - 4 \times 3 = -11$
$\Delta < 0$ donc $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$
du signe de $a = 1$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$
(v_n) croissante sur $\mathbb{N}$