Correction du devoir n° 8 - 1S

Ex 1 : • cas 1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

0,75 $= \frac{1}{2}(16 + 9 - 36) = \frac{1}{2} \times (-11) = \frac{-11}{2}$

cas 2 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ (ABC isocèle en A)

0,75 $= 6 \times 6 \times \cos 30° = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ (4)

cas 3 : ABC isocèle en C, H milieu de [AB] } donc (CH) est la médiane issue de C et aussi hauteur

0,5 donc (CH) ⊥ (AB)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH$ — $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ de même sens colinéaires –

0,75 $= 6 \times 3 = 18$

cas 4 dans le repère orthonormé $(A; \frac{1}{6}\overrightarrow{AP}, \frac{1}{6}\overrightarrow{AR})$ 0,5
(APQR est un carré de côté 6).

A (0;0) B(6;3) C(3;6)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}} = 18 + 18 = 36$ 0,75

Ex 2 : • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ — A(0;2) B(−1;1) C(4;0) (3)

0,5 $\begin{cases} AB^2 = 1 + 1 = 2 \text{ donc } AB = \sqrt{2} \\ AC^2 = 16 + 4 = 20 \text{ donc } AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{cases}$

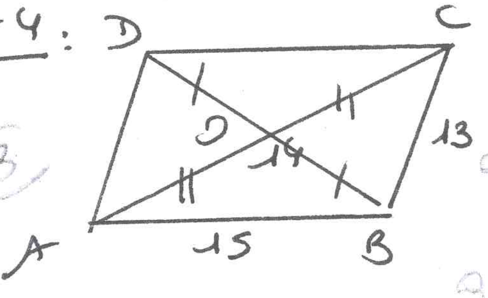
alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \cos \widehat{BAC} = \boxed{2\sqrt{10} \cos \widehat{BAC}}$ 0,75

• or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}} = -4 + 2 = -2$ 0,75

• On a alors : $2\sqrt{10} \cos \widehat{BAC} = -2 \Longrightarrow \boxed{\cos \widehat{BAC} = \frac{-1}{\sqrt{10}}}$ 0,5

et $\boxed{\widehat{BAC} \simeq 108,4°}$ 0,5

Ex 4 :



(3)

• ABCD est un parallélogramme de centre O donc O milieu des diagonales [AC] et [BD]. 0,5

• (BO) est la médiane issue de B dans le triangle ABC 0,5

D'après le théorème de la médiane

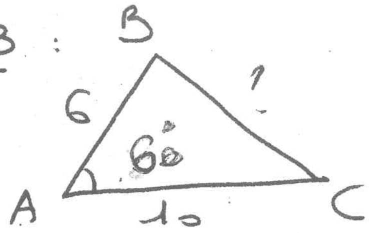
$AB^2 + BC^2 = 2BO^2 + \frac{1}{2}AC^2 \Longleftrightarrow 15^2 + 13^2 = 2BO^2 + \frac{1}{2} \times 14^2$ 1,5

$\Longleftrightarrow 394 = 2BO^2 + 98$

$\Longleftrightarrow 2BO^2 = 296 \Longleftrightarrow \boxed{BO^2 = 148}$

$BO = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$ donc $\boxed{BD = 4\sqrt{37}}$ 0,5

Ex3 :



1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos \widehat{BAC}$
$= 60 \cos(60°) = 60 \times \frac{1}{2} = 30$ 0,75

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
$= \frac{1}{2}(100 + 36 - BC^2)$ 0,75
$= 68 - \frac{1}{2}BC^2$

donc $30 = 68 - \frac{1}{2}BC^2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}BC^2 = 38$
$\Leftrightarrow BC^2 = 76$
$\Leftrightarrow \boxed{BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}}$ 0,5

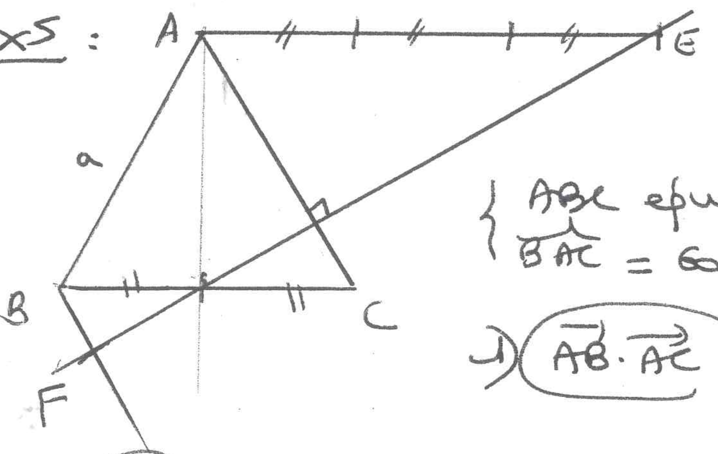
5

2) $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\widehat{ABC} = \boxed{12\sqrt{19}\cos\widehat{ABC}} \\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(36 + 76 - 100) = 6\end{array}\right.$ 1,5

donc $12\sqrt{19}\cos\widehat{ABC} = 6 \Leftrightarrow \cos\widehat{ABC} = \frac{1}{2\sqrt{19}}$
et $\boxed{\widehat{ABC} \simeq 83{,}4°}$ 0,75

Dans un triangle la somme des angles vaut 180°
donc $\widehat{ACB} = 180 - (60 + 83{,}4) = 36{,}6°$ 0,75

Ex5 :



$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\left\{\begin{array}{l}ABC \text{ equilatéral donc } AB = AC = BC = a \\ \widehat{BAC} = 60° = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}\end{array}\right.$ 0,75

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$
$= a \times a \times \cos 60° = \frac{1}{2}a^2$ 0,75

2) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$
$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
$= -\frac{3}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
$= \boxed{\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}}$

5

2

3) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$
$= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \frac{5}{4}AC^2 = \frac{5}{2}\times\frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{4}a^2 = 0$ 1

$\Leftrightarrow \boxed{(EF) \perp (AC)}$ 0,5