Correction du devoir n° 6 – 1S

Ex 1 : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de
0,25 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ car $x \neq 0$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(4x-5)\times x - (2x^2-5x+2)\times 1}{x^2}$

$$= \frac{4x^2 - 5x - 2x^2 + 5x - 2}{x^2}$$

1

$$= \frac{2x^2 - 2}{x^2} = \frac{2(x^2-1)}{x^2}$$

2) $2 > 0$ et $x^2 > 0$
0,25 donc $f'(x)$ est du signe
de $x^2 - 1$.

1

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1 ($a=1$)		+ signe de a	0	− signe de −a	||	−	0	+ signe de a	
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$		↗	-9	↘	||	↘	-1	↗	

-9 est un maximum local atteint pour $x = -1$
0,5 et -1 un minimum local atteint pour $x = 1$

3) $f(x) = 0 \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0$ $\quad \Delta = 25 - 4\times 2\times 2 = 9$
$\sqrt{\Delta} = 3$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad S = \{1/2 ; 2\}$$

1 $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en 2 points
d'abscisses 2 et $1/2$.

4) $\mathcal{D} : y = -6x$ Deux droites sont parallèles si
elles ont le même coefficient directeur
0,25 Il s'agit de résoudre $f'(x) = -6$

soit $\dfrac{2(x^2-1)}{x^2} = -6 \iff 2(x^2-1) = -6x^2$
$\iff 2x^2 - 2 = -6x^2$
$\iff 8x^2 - 2 = 0$
0,75 $\iff 4x^2 - 1 = 0$
$\iff x^2 = 1/4 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

$f(-1/2) = -10$ et $f(1/2) = 0$

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à $\mathcal{D}$

0,5 en $A(-1/2\ ;\ -10)$ et $B(1/2\ ;\ 0)$

$T_A : y = -6x + b$

$A \in T_A \iff -10 = 3 + b$

1 $\iff b = -13$

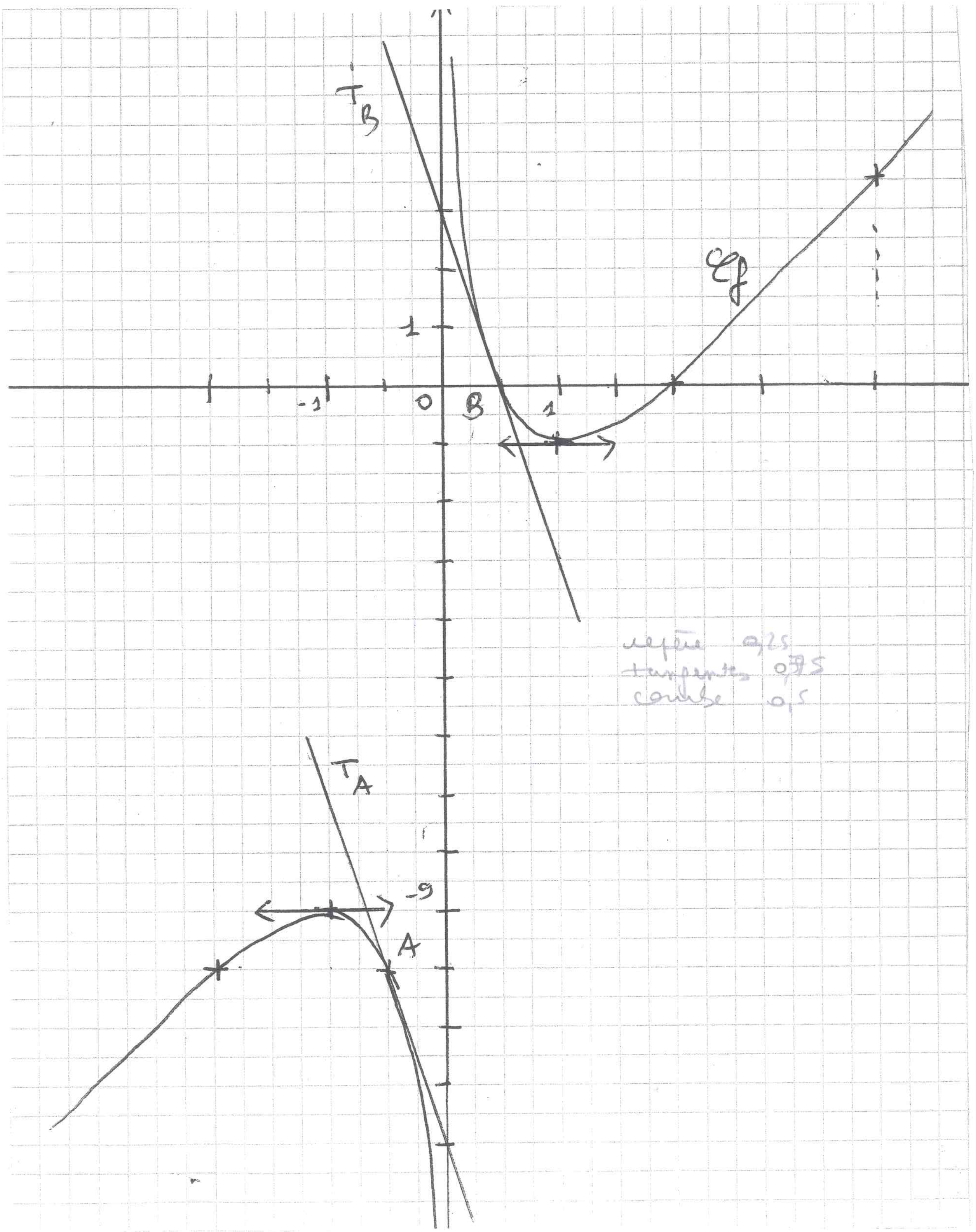
$\boxed{T_A : y = -6x - 13}$

$T_B : y = -6x + b$

$B \in T_B \iff 0 = -3 + b$

$\iff b = 3$

$\boxed{T_B : y = -6x + 3}$



Ex 2 : $f(x) = -3x\sqrt{x}$

1) f est définie sur $[0;+\infty[$, dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

2) $(uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = -3\sqrt{x} + (-3x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -3\sqrt{x} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

$= -\dfrac{9}{2}\sqrt{x}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x} > 0 \\ -\dfrac{9}{2} < 0\end{array}\right\}$

3) $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{-3h\sqrt{h} - 0}{h} = -3\sqrt{h}$

$h > 0$

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Ex 3 : $x^3 \geq 3x - 2$

$\iff x^3 - 3x + 2 \geq 0$

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$ polynôme défini sur $[-2;+\infty[$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-2;+\infty[$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

(du signe de a à l'extérieur des racines) $f'(x)$ $a = 3$

x	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\boxed{\text{Sur } [-2;+\infty[}$ le minimum pour f est 0 atteint en $x = -1$ et en $x = 1$

donc $f(x) \geq 0 \iff x^3 - 3x + 2 \geq 0 \iff \boxed{x^3 \geq 3x - 2}$

Ex4 : 1)

$r > 0$

volume du cylindre

$V = \pi r^2 \times h$

or $V = 1\,L$

donc $\pi r^2 \times h = 1$

soit $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

2) aire totale du cylindre

$\mathcal{A}(r) = \underbrace{2\pi r^2}_{(2\text{ bases})} + \underbrace{2\pi r \times h}_{(\text{aire latérale})} = 2\pi r^2 + \dfrac{2\pi r}{\pi r^2}$

$= \boxed{2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}}$

3) $\mathcal{A}$ est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

$\mathcal{A}'(r) = 2\pi \times 2r - 2 \times \dfrac{1}{r^2} = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 2}{r^2}$

4) $r^2 > 0$ donc $\mathcal{A}'(r)$ est du signe du numérateur

$\mathcal{A}'(r) \geqslant 0 \iff 4\pi r^3 - 2 \geqslant 0 \iff 2\pi r^3 - 1 \geqslant 0$

$\iff \pi r^3 \geqslant \dfrac{1}{2} \iff r^3 \geqslant \dfrac{1}{2\pi}$

$x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ $\iff r \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$

Soit $\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$

$\alpha \approx 0,542$

r	0		α		$+\infty$
$\mathcal{A}'(r)$	‖	$-$	0	$+$	
$\mathcal{A}(r)$	‖	↘	$\mathcal{A}(\alpha)$	↗	

L'aire est minimale pour $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$

c'est à dire $2\pi r^3 = 1 \iff \pi r^2 = \dfrac{1}{2r}$

alors $h = \dfrac{1}{\pi r^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{2r}} = 2r$

5) $1L = 1\,dm^3$ l'aire est minimale pour

$r \approx 0,54\,dm$ soit $\boxed{r \approx 5,4\,cm}$ et $\boxed{h \approx 10,8\,cm}$