Correction du devoir n°2 - 1S

Ex 1 : 1) $x - 5\sqrt{x} - 14 = 0$ $\qquad x \in [0;+\infty[$

On pose $X = \sqrt{x}$ alors $X^2 = x$ $\qquad X \in [0;+\infty[$

l'équation devient :

$X^2 - 5X - 14 = 0$ $\qquad \Delta = 25 - 4\times(-14) = 81$

$\sqrt{\Delta} = 9$

0,75

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{5+9}{2} = 7 \\ X_2 = \dfrac{5-9}{2} = -2 \notin [0;+\infty[\end{cases}$$

0,5 alors $\sqrt{x} = 7 \iff x = 49$ $\qquad \boxed{S = \{49\}}$

2) $\sqrt{x+5} = 1 - x$

On travaille sur $[-5;1]$

$x + 5 \geq 0 \iff x \geq -5$ et $1 - x \geq 0 \iff -x \geq -1 \iff x \leq 1$ 0,5

$\sqrt{x+5} = 1 - x$

$\Rightarrow x + 5 = 1 - 2x + x^2$ $\qquad \Delta = 9 - 4\times(-4) = 25$

$\iff 0 = x^2 - 3x - 4$ $\qquad \sqrt{\Delta} = 5$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+5}{2} = 4 \notin [-5;1] \\ x_2 = \dfrac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

$\boxed{S = \{-1\}}$ 1

3) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 1}$

$x^2 - x - 6 \geq 0$ et $x - 1 \geq 0$ 5,5

$\iff (x+2)(x-3) \geq 0$ $\qquad \iff x \geq 1$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$ ($a = 1$)		+ (signe de a)	0	− (signe de $-a$)	0	+ (signe de a)	

On travaille sur $[3;+\infty[$ 1

$\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 1}$ $\qquad \Delta = 4 - 4\times(-5) = 24$

$\iff x^2 - x - 6 = x - 1$ $\qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\iff x^2 - 2x - 5 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+2\sqrt{6}}{2} = 1 + \sqrt{6} \\ x_2 = 1 - \sqrt{6} \notin [3;+\infty[\end{cases}$$

1 $\qquad \boxed{S = \{1 + \sqrt{6}\}}$

Ex 2 : Soit x le nombre cherché $x \neq 0$ 0,25

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{97}{36}} \iff \frac{x^4+1}{x^2} = \frac{97}{36} \iff 36x^4 + 36 = 97x^2$$

$$\iff 36x^4 - 97x^2 + 36 = 0$$ 0,75

On pose $X = x^2$ et l'équation devient

$36X^2 - 97X + 36 = 0$ $X \in [0;+\infty[$ 0,25

$\Delta = 4225$ $\sqrt{\Delta} = 65$ 3,5

0,75 $\begin{cases} X_1 = \dfrac{97-65}{72} = \dfrac{32}{72} = \dfrac{4}{9} \\ X_2 = \dfrac{97+65}{72} = \dfrac{162}{72} = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$x^2 = \frac{4}{9}$ ou $x^2 = \frac{9}{4}$

$\iff x = \frac{2}{3}$ ou $-\frac{2}{3}$ ou $x = \frac{3}{2}$ ou $\frac{-3}{2}$

0,5 Les nombres qui conviennent sont $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{2}$ ou $\frac{-2}{3}$ ou $\frac{-3}{2}$

Ex 3 : $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 16x - 36$ sur $\mathbb{R}$

1) $f(-2) = 4\times(-8) + 9\times 4 - 16\times(-2) - 36$
$= -32 + 36 + 32 - 36 = 0$

-2 est racine de f donc $f(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$ 0,5

$f(x) = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c$

or $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 16x - 36$

donc $\begin{cases} a = 4 \\ b + 2a = 9 \\ c + 2b = -16 \\ 2c = -36 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ -18 + 2 = -16 \text{ vérifié} \\ c = -18 \end{cases}$

donc $\boxed{f(x) = (x+2)(4x^2 + x - 18)}$ 1

2) $f(x) = 0 \iff x + 2 = 0$ ou $4x^2 + x - 18 = 0$

$\iff x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = -9/4$

$\Delta = 1 - 4\times(-18)\times 4 = 289$

$\sqrt{\Delta} = 17$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-17}{8} = -9/4 \\ x_2 = \dfrac{-1+17}{8} = 2 \end{cases}$

$\boxed{S = \{-9/4 ; -2 ; 2\}}$ 1

3)

x	$-\infty$		$-9/4$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x^2+x-18$ (a=4)		$+$ signe de a	0	$-$ signe de $-a$		$-$	0	$+$ signe de a	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

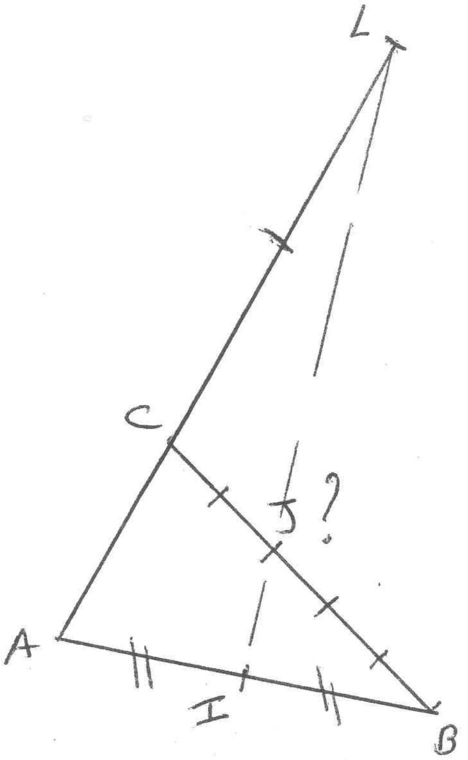
1

$f(x) \geq 0$

$\boxed{S = \left[-\frac{9}{4} ; -2\right] \cup [2 ; +\infty[}$

Ex 4 I milieu de [AB], $\vec{BJ} = \frac{3}{5}\vec{BC}$, $\vec{AL} = 3\vec{AC}$

1)



2) a) $\vec{IL} = \vec{IA} + \vec{AL}$

car I milieu de [AB] $\rightarrow$ $= \frac{1}{2}\vec{BA} + 3\vec{AC}$

$= \boxed{-\frac{1}{2}\vec{AB} + 3\vec{AC}}$ 0,5

b) $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ}$

I milieu de [AB] $\rightarrow$ $= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$

$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{5}(\vec{BA} + \vec{AC})$

$= \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}$

$= \boxed{\frac{-1}{10}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}}$ 1

c) $\begin{cases} \vec{IL} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + 3\vec{AC} \\ \vec{IJ} = \frac{-1}{10}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3}{5} \times 5 = 3 \\ \frac{-1}{10} \times 5 = \frac{-5}{10} = \frac{1}{2} \end{cases}$

0,75

$\vec{IL} = 5\vec{IJ}$ les vecteurs $\vec{IL}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires donc I, J et L sont alignés

0,5

3) Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$

a) $\begin{cases} A(0;0),\ B(1;0),\ C(0;1) \\ \text{I milieu de [AB] donc } \boxed{I(1/2;0)} \\ \vec{AL} = 3\vec{AC} \text{ donc } \boxed{L(0;3)} \end{cases}$ 0,5 0,25 0,25

b) $\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{BJ}$

$= \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$

$= \vec{AB} + \frac{3}{5}(\vec{BA} + \vec{AC})$

$= \vec{AB} - \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}$

0,75

$= \boxed{\frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}}$

Donc $\boxed{J(2/5;3/5)}$

0,25

c) $\vec{IL}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{IJ}\begin{pmatrix} -1/10 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

0,5

$-\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - 3 \times \frac{-1}{10}$

$= -\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = 0$

0,5

Donc $\vec{IL}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires

et I, L, J sont alignés

6

Ex5 : $\mathcal{P} : y = x^2 - 3x - 4$

$\mathcal{D}_m : y = -mx - 5$ $\quad m \in \mathbb{R}$

Chercher l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_m$ revient à résoudre $x^2 - 3x - 4 = -mx - 5$

soit $x^2 - 3x + mx + 1 = 0$

$(E) : \boxed{x^2 + (m-3)x + 1 = 0}$

$\Delta_m = (m-3)^2 - 4 = m^2 - 6m + 9 - 4 = \boxed{m^2 - 6m + 5}$

$\Delta = 36 - 4 \times 5 = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ m_2 = \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

m	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Δ_m $a = 1$		$+$ signe de a	0	$-$ signe de $-a$	0	$+$ signe de a	

1

a) $\mathcal{D}_m$ coupe $\mathcal{P}$ en un seul point

$\Leftrightarrow$ (E) admet une seule solution

$\Leftrightarrow \Delta_m = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = 1}$ ou $\boxed{m = 5}$

pour $m = 1$

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{P}$ se coupent en $A_1(1 ; -6)$

pour $m = 5$

$\mathcal{D}_5$ et $\mathcal{P}$ se coupent en $A_5(-1 ; 0)$

b) $\mathcal{D}_m$ coupe $\mathcal{P}$ en 2 points distincts

$\Leftrightarrow$ (E) admet 2 solutions distinctes

$\Leftrightarrow \Delta_m > 0 \Leftrightarrow \boxed{m < 1}$ ou $\boxed{m > 5}$

c) $\mathcal{D}_m$ ne coupe jamais $\mathcal{P}$

$\Leftrightarrow$ (E) n'admet aucune solution

$\Leftrightarrow \Delta_m < 0 \Leftrightarrow \boxed{1 < m < 5}$