Correction du devoir n°10 – 1S

Ex 1 : 1) (v_n) suite géométrique de premier terme v_0 de raison q

$$\begin{cases} v_5 = 486 \\ v_7 = 4374 \end{cases} \qquad v_7 = v_5 \times q^2$$

$$\iff 4374 = 486 \times q^2$$

$$\iff q^2 = 9 \iff q = 3 \text{ ou } q = -3$$

deux valeurs possibles pour la raison

$$v_5 = v_0 \times q^5 \iff \begin{cases} 486 = v_0 \times 243 \\ \text{ou } 486 = v_0 \times (-243) \end{cases} \iff \boxed{v_0 = 2} \text{ ou } v_0 = -2$$

2) $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{6561}$

Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme $u_0 = \frac{1}{3}$ de raison $(-1/3)$

$$u_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad u_n = -\frac{1}{6561} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{-1}{6561}$$

$$\iff -2187 = (-3)^n$$

$$\iff \boxed{n = 7}$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_7 = u_0 \times \frac{1 - q^8}{1 - q} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - (-1/3)^8}{1 - (-1/3)}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1 - (1/3)^8}{4/3} = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8\right] = \boxed{\frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{6561}\right]}$$

Ex 2 : 1) $u_n = \frac{2^n}{n} \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} = \frac{2^{n+1} \times n - 2^n \times (n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2^n[2n - (n+1)]}{n(n+1)} = \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}$$

$2^n > 0$ $\quad$ $n - 1 \geqslant 0$ car $n \geqslant 1$ $\quad$ Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

$n > 0$ $\quad$ $u_{n+1} \geqslant u_n$

$n + 1 > 0$ $\quad$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

2) $v_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n \quad n \in \mathbb{N}$

$v_n = f(n)$ avec $f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 54x$

définie dérivable sur $[0; +\infty[$

$$f'(x) = 6x^2 - 60x + 54 = 6(x^2 - 10x + 9)$$

$$= 6(x-1)(x-9)$$

x	0		1		9		$+\infty$
$a f'(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	$+$ signe de a	
$f(x)$	0	$\nearrow$	26	$\searrow$	-486	$\nearrow$	$+\infty$

Alors (v_n) est décroissante pour $1 \leq n \leq 9$
et (v_n) est croissante à partir de $n=9$

Ex 3 : 1) $\begin{cases} u_0 = 115 & \text{nombre d'oiseaux le } 1/1/13 \\ u_1 = \frac{40}{100} \times 115 + 120 = 166 & \text{(oiseaux le } 1/1/14) \\ u_2 = \frac{40}{100} \times 166 + 120 = 186,4 \approx 186 & \text{(oiseaux le } 1/1/15) \end{cases}$

Il faut arrondir à l'unité puisque c'est le nombre d'oiseaux.

2) ⓐ Algo 1 : $U \leftarrow 0,6 \times U + 120$
multiplier par $0,6$ correspond à prendre 60% des oiseaux

Algo 2 : $U \leftarrow 0,4 \times U + \underline{115}$ ce sont 120 nouveaux oiseaux et non 115
ok
en plus $U \leftarrow 115$ doit être à l'extérieur de la boucle

ⓑ $\begin{cases} \boxed{u_{n+1} = 0,4\, u_n + 120} & (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 115 \end{cases}$

3) $\boxed{v_n = u_n - 200}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $n \in \mathbb{N}$
$v_{n+1} = u_{n+1} - 200$
$= 0,4\, u_n + 120 - 200$
$= 0,4\, u_n - 80$
$= 0,4(u_n - 200)$
$= 0,4\, v_n$

$v_0 = u_0 - 200 = 115 - 200 = -85$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0,4$ de 1er terme $v_0 = -85$

ⓑ donc $v_n = v_0 \times q^n$
$\boxed{v_n = -85 \times 0,4^n}$

ⓒ $u_n = v_n + 200$
$\Leftrightarrow \boxed{u_n = 200 - 85 \times 0,4^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $-1 < 0{,}4 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}4^n = 0$

Par Produit et Somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 200$

(u_n) converge vers 200

e) $u_n = 200 - 85 \times 0{,}4^n$ donc $\boxed{u_n < 200}$

$85 \times 0{,}4^n > 0$ $\quad n \in \mathbb{N}$

La capacité de 200 oiseaux est suffisante.

f) Variables U, i, N

début

N

U ← 115

Tant que U ≤ 199,99 Faire

U ← 0,4 U + 120

N ← N + 1

Fin tant que

Afficher N

fin

D'après la calculatrice $u_9 < 199{,}99$ et $u_{10} > 199{,}99$

donc $n = 10$ au 1er janvier 2023

4) II Il s'agit de calculer $\quad 2018 = 2013 + 5$

$T = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

$= 115 + 166 + 186{,}4 + 194{,}56 + 197{,}82 + 199{,}12$

$= 1058{,}9136 \approx 1059$

Entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018 il y aura environ 1059 oiseaux présents

$1059 \times 20 = 21180$

Soit une subvention totale de 21 180 €

Exercice 4 (5 pts) : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On suppose que pour tout entier n, on a $u_n \neq 0$, et on définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 1/2$

$$\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1) $$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1/2}{2} = 1/4 \\ u_2 = \dfrac{1/4}{1+1/2} = \dfrac{1/4}{3/2} = 1/4 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{4} \\ u_2 - u_1 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{4} \times 2 = 1/2 \\ \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1/6}{1/4} = \dfrac{1}{6} \times 4 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique

2) $u_n \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1}$

a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + 1 = \dfrac{1+2u_n}{u_n} + 1 = \dfrac{1+3u_n}{u_n}$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 3 = \left(\dfrac{1}{u_n} + 1\right) + 2 = \boxed{v_n + 2}$

$v_0 = \dfrac{1}{u_0} + 1 = 2 + 1 = 3$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2 de 1er terme $v_0 = 3$

b) $v_n = v_0 + n \times r = \boxed{3+2n}$ et $u_n = \dfrac{1}{v_n - 1} = \dfrac{1}{2+2n}$
$n \in \mathbb{N}$

3) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{2+2x}$ définie dérivable sur $[0;+\infty[$

$f'(x) = -\dfrac{2}{(2+2x)^2}$ $f'(x) < 0$ donc f décroissante

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (donc majorée par $u_0 = 1/2$) car $x \mapsto 1/x$ strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

4) $u_n = \dfrac{1}{2+2n} > 0$

$0 < n$
$\Leftrightarrow 0 < 2n$
$\Leftrightarrow 2 < 2n+2$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2n+2}$ donc $u_n < 1/2$

n $\boxed{0 < u_n \leq 1/2}$