

Devoir n°10 - Suites - 1S

9 mai 2014 - 2 h

Exercice 1 (2 pts) :

- (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q telle que $v_2 = -18$ et $v_4 = -162$. Déterminer q et v_0 .
- Calculer la somme $S = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{32768}$ en justifiant.

Exercice 2 (2.5 pts) :

On désire décorer l'encolure d'un bustier avec des rangées de perles dont on veut déterminer le nombre. Le 1er rang comporte 78 perles, le 2ème rang comporte 74 perles, le 3ème rang comporte 70 perles... et ainsi de suite. La dernière rangée comporte 10 perles.

- Déterminer le rang N correspondant à cette dernière rangée.
- Calculer le nombre total de perles nécessaires pour décorer le bustier.

Exercice 3 (4 pts) :

- Etudier les variations des suites suivantes :
- (u_n) définie par $u_n = 2n^2 - 3n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - (v_n) définie par $v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - (w_n) définie par $w_n = \frac{3n-1}{2-5n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (4.5 pts) :

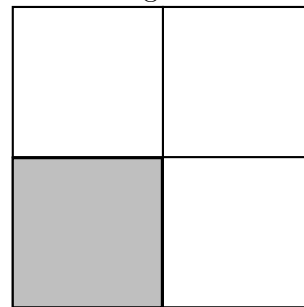
Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

- Calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
- On suppose que pour tout entier n , on a $u_n \neq 0$, et on définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
 - Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
 - Donner l'expression de v_n en fonction de n , et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 5 (7 pts) : On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

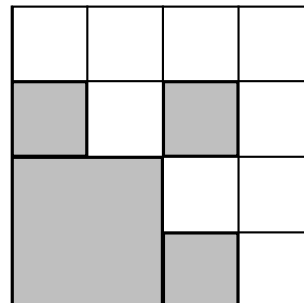
Première étape du coloriage :

On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure.
(la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage :

On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé.

Pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en cm^2 , de la surface totale coloriée après n coloriages.

On a ainsi $A_1 = 1$.

La surface coloriée sur la figure à la 2^e étape du coloriage a donc pour aire A_2 .

Les deux parties suivantes A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A :

1. Calculer A_2 puis montrer que $A_3 = \frac{37}{16}$.
2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée : P un entier naturel non nul.
Initialisation : $N = 1$; $U = 1$.

Traitement :

Tant que $N \leq P$:	
Afficher U	
Affecter à N la valeur $N + 1$	
Affecter à U la valeur $\frac{5}{4} \times U + \frac{1}{2}$	

- a) Faire fonctionner cet algorithme avec $P = 3$.
- b) Cet algorithme permet d'afficher les P premiers termes d'une suite U de terme général U_n .
Dire si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
Proposition 1 : Il existe un entier naturel n strictement supérieur à 1 tel que $U_n = A_n$.
Proposition 2 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $U_n = A_n$.

Partie B :

On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \frac{3}{4}A_n + 1$.

1. Que faut-il modifier dans l'algorithme pour qu'il affiche le terme A_n pour n entier naturel donné.
2. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_n = A_n - 4$.
 - a) Montrer que (B_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
 - b) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n en fonction de n , et en déduire celui de A_n .
3. Quel est le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier la réponse.
Donner une interprétation de ce résultat en rapport avec l'aire de la surface coloriée.
4. Comment transformer l'algorithme pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $A_n > 3.99$.
A l'aide de la calculatrice, déterminer cet entier n .