Correction du devoir n°10 - 1S

Ex1 : 1) (v_n) suite géométrique de 1er terme v_0 de raison q. /3

$v_2 = -18$ et $v_4 = -162$

$v_2 = v_0 \times q^2$

$\Leftrightarrow -18 = v_0 \times 9$ 1

$\Leftrightarrow \boxed{v_0 = -2}$ 0,5

$v_4 = v_2 \times q^2$

$\Leftrightarrow -162 = -18 \times q^2$

$\Leftrightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = 3$ ou $q = -3$

deux valeurs possibles pour la raison.

2) $S = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{32768}$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de 1er terme $u_0 = 4$

$u_n = u_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 0,5

$u_n = \frac{1}{32768} \Leftrightarrow 4 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{32768}$ calculatrice

0,5 $\Leftrightarrow 131072 = 2^n \Leftrightarrow n = 17$

alors $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{17} = u_0 \times \frac{1 - q^{18}}{1 - q}$

0,5 $= 4 \times \frac{1 - (1/2)^{18}}{1 - 1/2} = \boxed{8\left[1 - \frac{1}{2^{18}}\right]} \simeq 8$

Ex2 : Soit (u_n) la suite arithmétique de raison (-4) de 1er terme $u_1 = 78$ (nombre de perles sur le 1er rang) 0,5

1) u_n est le nombre de perles sur le n-ième rang /2

alors $u_n = u_1 + (n-1) \times r$

$n \geq 1$ $= 78 + (n-1) \times (-4) = 82 - 4n$

1 $u_N = 10 \Leftrightarrow 82 - 4N = 10 \Leftrightarrow 72 = 4N \Leftrightarrow N = 18$

Il y a 10 perles sur la 18ème rangée, la dernière.

2) $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{18}$

$= \frac{(u_1 + u_{18}) \times 18}{2} = \frac{(78 + 10) \times 18}{2} = 792$

0,5 On a besoin de 792 perles pour réaliser le bustier

Ex 3 : 1) $u_n = 2n^2 - 3n - 2$ $(n \in \mathbb{N})$ (14)

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

définie dérivable sur $[0;+\infty[$

$f'(x) = 4x - 3$ 1,5

x	0 $3/4$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ ϕ $+$
$f(x)$	$-2 \searrow f(3/4) \nearrow$

$f(1) = 2 - 3 - 2$
$= -3$

$f(1) < f(0)$

Donc f est croissante pour $x \geqslant 3/4$
et (u_n) croissante à partir de $n = 1$

2) $v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{n+2} + 1\right) - \left(\frac{1}{n+1} + 1\right)$

$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{(n+1) - (n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$

$\left.\begin{array}{l} -1 < 0 \\ n+2 > 0 \\ n+1 > 0 \end{array}\right\}$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$

(v_n) est décroissante pour $n \in \mathbb{N}$ 1

3) $w_n = \frac{3n-1}{2-5n}$ $(n \in \mathbb{N})$ $w_n = g(n)$ avec $g(x) = \frac{3x-1}{2-5x}$

définie dérivable sur $[0;+\infty[\setminus \{2/5\}$ $\boxed{w_0 = -\frac{1}{2} \quad w_1 = -\frac{2}{3}}$

$g'(x) = \frac{3(2-5x) - (3x-1)\times(-5)}{(2-5x)^2} = \frac{1}{(2-5x)^2}$ 1,5

$g'(x) > 0$ donc g croissante sur $[0;+\infty[\setminus \{2/5\}$

alors (w_n) croissante à partir de $n = 1$

Ex 4 : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n} \end{array}\right.$ $n \in \mathbb{N}$ 1) $\left\{\begin{array}{l} u_1 = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} \\ u_2 = \frac{4/5}{2+6/5} = \frac{4/5}{16/5} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$ 0,25 /5

$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_0 = \frac{2}{5} - 1 = \frac{-3}{5} \\ u_2 - u_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{-3}{20} \end{array}\right\}$ 0,5 $\left\{\begin{array}{l} \frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{5} \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{1/4}{2/5} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{8} \end{array}\right.$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

donc la suite (u_n) n'est ni arithmétique 0,25

2) $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \neq 0$, $\boxed{v_n = \dfrac{1}{u_n}}$

ⓐ $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{2u_n}{2+3u_n}} = \dfrac{2+3u_n}{2u_n} = \dfrac{2}{2u_n} + \dfrac{3u_n}{2u_n}$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{3}{2} = v_n + \dfrac{3}{2}$ $\quad v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $3/2$ de 1er terme $v_0 = 1$ $\quad$ 1,5

ⓑ alors $v_n = v_0 + n \times r = 1 + \dfrac{3}{2}n = \dfrac{2+3n}{2}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

et $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{2}{2+3n}$ $\quad$ 0,75

3) Soit $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2}{2+3x}$ définie dérivable sur $[0 ; +\infty[$

$f'(x) = 2 \times \dfrac{-3}{(2+3x)^2} = \dfrac{-6}{(2+3x)^2}$

0,75 $\quad f'(x) < 0$ donc f décroissante et (u_n) est décroissante pour $n \in \mathbb{N}$

4) $u_n = \dfrac{2}{2+3n}$ $\quad$ $2 > 0$, $2+3n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ donc $u_n > 0$

0,25

$0 < 3n$

$\Leftrightarrow 2 < 3n + 2$ $\quad$ $x \mapsto 1/x$ strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3n+2}$ $\quad$ Donc $\boxed{0 < u_n \leq 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

0,75

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{2} > \dfrac{2}{3n+2}$

$\Leftrightarrow \boxed{1 > u_n}$ $\quad$ ou $\begin{cases} (u_n) \text{ décroissante} \\ \text{et } u_0 = 1 \text{ donc} \end{cases}$ $u_n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$

Ex5 : Partie A $\quad$ 17

1) $\begin{cases} A_1 = 1 \ (cm^2) \\ A_2 = A_1 + 3 \times \dfrac{A_1}{4} = 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4} \\ A_3 = A_2 + 9 \times \dfrac{A_1}{16} = \dfrac{7}{4} + \dfrac{9}{16} = \dfrac{37}{16} \end{cases}$ $\quad$ 0,25 $\quad$ 0,5

2) ⓐ $P = 3$

N	1	2	3	4
U	1	7/4	43/16	247/64

Affiche Calcule $\quad$ 0,75

$\begin{cases} \dfrac{5}{4} \times \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{35}{16} + \dfrac{8}{16} = \dfrac{43}{16} \\ \dfrac{5}{4} \times \dfrac{43}{16} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{215}{64} + \dfrac{32}{64} = \dfrac{247}{64} \end{cases}$

ⓑ proposition 1 : vrai $U_2 = A_2 = 7/4$
proposition 2 : faux $U_3 \neq A_3$. 0,75

Partie B : $n \geq 1$ $\boxed{A_{n+1} = \frac{3}{4} A_n + 1}$

1) • Affecter à U la valeur $\boxed{\frac{3}{4} \times U + 1}$ 0,5

• Afficher U peut-être à l'extérieur de la boucle Tant que et alors, seul A_n (le dernier) sera affiché

2) $\boxed{B_n = A_n - 4}$ $n \geq 1$

ⓐ $B_{n+1} = A_{n+1} - 4$

$= \frac{3}{4} A_n + 1 - 4$

$= \frac{3}{4} A_n - 3$

$= \frac{3}{4} (A_n - 4)$

$= \frac{3}{4} B_n$ 1,5

donc (B_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ de 1er terme $B_1 = A_1 - 4 = -3$

$B_n = B_1 \times q^{n-1}$

ⓑ donc $B_n = -3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ $n \geq 1$

$A_n = B_n + 4$

$\Rightarrow \boxed{A_n = 4 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$ 0,75

3) $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$ 0,5

Par produit et somme $\lim_{n \to +\infty} A_n = 4$

(A_n) converge vers 4 0,5

L'aire de la surface coloriée tend vers l'aire totale du carré initial soit 4 cm²

4) Entrée

Initialisation : $N = 1$; $U = 1$

Traitement : Tant que $U \leq 3,99$:

Affecter à N la valeur N+1

Affecter à U la valeur $\frac{3}{4} \times U + 1$ 1

Sortie : Afficher N

D'après la calculatrice $A_{20} < 3,99$ et $A_{21} > 3,99$

Donc $\boxed{n = 21}$