Applications du 2d degré - 1S

Ex 1 : 1) $\sqrt{3-x} = 3x+5$

$\begin{cases} 3-x \geqslant 0 \iff -x \geqslant -3 \iff x \leqslant 3 \\ 3x+5 \geqslant 0 \iff 3x \geqslant -5 \iff x \geqslant -\frac{5}{3} \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{D} = [-5/3 ; 3]}$

$\sqrt{3-x} = 3x+5$

$\iff (3-x) = 9x^2 + 30x + 25$

$\iff 0 = 9x^2 + 31x + 22$

$\Delta = 31^2 - 4 \times 9 \times 22 = 169$

$\sqrt{\Delta} = 13$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-31-13}{18} = \dfrac{-44}{18} = \dfrac{-22}{9} \notin \mathcal{D} \\ x_2 = \dfrac{-31+13}{18} = -1 \end{cases}$

$\boxed{S = \{-1\}}$

2) $3x - 16\sqrt{x} + 5 = 0$ $\qquad \mathcal{D} = [0 ; +\infty[$

on pose $X = \sqrt{x} \in [0 ; +\infty[$

l'équation devient

$3X^2 - 16X + 5 = 0$

$\Delta = 16^2 - 4 \times 3 \times 5 = 196$

$\sqrt{\Delta} = 14$

$\begin{cases} X_1 = \dfrac{16+14}{6} = 5 \\ X_2 = \dfrac{16-14}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\iff X = 5$ ou $X = 1/3$

$\iff \sqrt{x} = 5$ ou $\sqrt{x} = 1/3$

$\iff x = 25$ ou $x = 1/9$

$\boxed{S = \{1/9 ; 25\}}$

3) $\sqrt{x^2+6x+6} = \sqrt{x+2}$

- $x^2+6x+6 \geqslant 0$

$\Delta = 36 - 4 \times 6 = 12$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{2} = -3-\sqrt{3} \\ x_2 = -3+\sqrt{3} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{3}$		$-3+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2+6x+6 $a=1$		+	0	−	0	+	
		signe de a		signe de $-a$		signe de a	

$x^2+6x+6 \geqslant 0 \iff x \leqslant -3-\sqrt{3}$ ou $x \geqslant -3+\sqrt{3}$

- $x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$ $\qquad -2 < -3+\sqrt{3}$

Donc $\mathcal{D} = [-3+\sqrt{3} ; +\infty[$

$\sqrt{x^2+6x+6} = \sqrt{x+2}$

$\iff x^2 + 6x + 6 = x+2$

$\iff x^2 + 5x + 4 = 0$ $\qquad -1$ racine apparente

$\iff (x+1)(x+4) = 0$

$\iff x = -1$ ou $x = -4 \notin \mathcal{D}$

$\boxed{S = \{-1\}}$

Ex 2 : $f(x)=x^3-3x^2-4x+5 \qquad x\in\mathbb{R}$

1) $\mathcal{D} : y = 2x-3$

2) $\underline{P(x)} = f(x)-(2x-3) = x^3-3x^2-4x+5-2x+3$

$= \underline{x^3-3x^2-6x+8} \qquad \underline{x\in\mathbb{R}}$

ⓐ $P(1)=1-3-6+8=0$ donc 1 est racine de P

alors $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$

$= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$

or $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

donc $\begin{cases} a=1 \\ b-a=-3 \\ c-b=-6 \\ -c=8 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ -8-(-2)=-6 \text{ vérifié} \\ c=-8 \end{cases}$

donc $\boxed{P(x)=(x-1)(x^2-2x-8)}$

ⓑ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ revient à résoudre $f(x)=2x-3$ soit $P(x)=0$.
(abscisses des points)

$P(x)=0 \iff x=1$ ou $x^2-2x-8=0$ | $\Delta=4-4\times(-8)=36$

$\iff \underline{x=1 \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x=4}$ | $\sqrt{\Delta}=6$

| $\begin{cases} x_1=\frac{2+6}{2}=4 \\ x_2=\frac{2-6}{2}=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1=2\times1-3=-1 \\ y_2=2\times(-2)-3=-7 \\ y_3=2\times4-3=5 \end{cases}$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en 3 points

$A(1;-1)$, $B(-2;-7)$ et $C(4;5)$

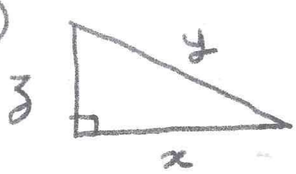
ⓒ Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ revient à étudier le signe de $f(x)-(2x-3)$ soit de $P(x)$.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x-8 ($a=1$)		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

du signe de a à l'extérieur des racines

$\begin{cases} \text{sur }]-\infty;-2]\cup[1;4],\ P(x)\leq 0 \text{ donc } \mathcal{C}_f \text{ est au-dessous de } \mathcal{D} \\ \text{sur }]-2;1[\cup]4;+\infty[,\ P(x)>0 \text{ donc } \mathcal{C}_f \text{ est strictement au-dessus de } \mathcal{D}. \end{cases}$

Ex3 : 1)



$x, y, z > 0$

- $x + y + z = 30$ (1)
- $x^2 + y^2 + z^2 = 338$ (2)
- D'après le théorème de Pythagore : $x^2 + z^2 = y^2$ (3)

En remplaçant dans (2), on obtient $2y^2 = 338$

$\iff y^2 = 169$

$\iff \boxed{y = 13}$

alors en remplaçant
$\begin{cases} \text{dans (1)} \quad x + z = 17 \\ \text{dans (2)} \quad x^2 + z^2 = 169 \end{cases}$ soit $\boxed{z = 17 - x}$ et $z^2 = 289 - 34x + x^2$

On obtient l'équation : $x^2 + 289 - 34x + x^2 = 169$

$\iff 2x^2 - 34x + 120 = 0$

$\iff \boxed{x^2 - 17x + 60 = 0}$

$\Delta = 17^2 - 4 \times 60 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{17+7}{2} = 12 \rightsquigarrow z_1 = 5 \\ x_2 = \dfrac{17-7}{2} = 5 \rightsquigarrow z_2 = 12 \end{cases}$

Alors le triangle a pour dimensions, 5, 12 et 13

2) Soit m le nombre d'étudiants au départ. ($m \in \mathbb{N}^*$) et soit p le prix initial par personne en €. ($p \in \mathbb{R}^*$)

On a : $\begin{cases} m \times p = 60 \\ (m-4) \times (p + 2{,}50) = 60 \end{cases} \iff \begin{cases} p = \dfrac{60}{m} \\ (m-4)\left(\dfrac{60}{m} + \dfrac{5}{2}\right) = 60 \; (*) \end{cases}$

$(*) \iff 60 + \dfrac{5}{2}m - \dfrac{240}{m} - 10 = 60$

$\iff \dfrac{5}{2}m - 10 - \dfrac{240}{m} = 0$

$\underset{(\times m)}{\iff} \dfrac{5}{2}m^2 - 10m - 240 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \times \dfrac{5}{2} \times (-240) = 2500$

$\sqrt{\Delta} = 50$

$\begin{cases} m_1 = \dfrac{10+50}{5} = 12 \\ m_2 = \dfrac{10-50}{5} = -8 < 0 \end{cases}$

Initialement, il y avait 12 étudiants dans le bus