AP- 18- Suites

Ex1 ①
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -2u_n^2 + 9u_n - 8 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -2u_n^2 + 9u_n - 8 - u_n \\ &= -2u_n^2 + 8u_n - 8 \\ &= -2(u_n^2 - 4u_n + 4) \\ &= -2(u_n - 2)^2 \end{aligned}$$

$\left.\begin{array}{l} -2 < 0 \\ (u_n - 2)^2 \geq 0 \end{array}\right\}$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

② $u_n = 3^n - 5 \quad (n \in \mathbb{N})$

$u_{n+1} - u_n = (3^{n+1} - 5) - (3^n - 5) = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3-1)$

$= 2 \times 3^n \quad u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} > u_n}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~strictement~~ croissante

③ $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

définie dérivable sur $[0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

$f'(x) > 0$ donc f croissante

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

Ex2 : 1)
$$\begin{cases} u_1 = 2341 & \text{(livres en juillet 2011)} \\ u_2 = 2341 + 123 = 2464 & \text{(août 2011)} \\ u_3 = 2464 + 123 = 2587 & \text{(sept 2011)} \end{cases}$$

$u_{n+1} = u_n + 123 \qquad$ 123 livres de plus par mois

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de terme initial $u_1 = 2341$

de raison 123

2) ⓐ alors $u_n = u_1 + (n-1)r$

$u_n = 2341 + (n-1) \times 123$

$\boxed{u_n = 2218 + 123n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

ⓑ janv 2012 correspond à $u_7 = 3079$ (livres)
déc 2012 correspond à $u_{18} = 4432$ (livres)

3) $S = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{18}$
$= \dfrac{(u_7 + u_{18}) \times 12}{2} = (3079 + 4432) \times 6$
$= 45\,066$

En 2012, 45 066 livres ont été produits

Ex3 : 1) $v_0 = 500 \times 2200 = 1{,}1$ (millions d'€) en 2010

$v_1 = 500 \times 2200 \times \left(1 + \dfrac{9{,}6}{100}\right)$
$= 1{,}1 \times 1{,}096 = 1{,}2056$ (millions d'€) en 2011

$v_2 = 1{,}2056 \times 1{,}096 \approx 1{,}321$ (millions d'€ en 2012)

2) $\boxed{v_{n+1} = v_n \times 1{,}096}$ ↗ 9,6% revient à $\times\left(1 + \dfrac{9{,}6}{100}\right)$

(v_n) est une suite géométrique de raison 1,096 de terme initial $v_0 = 1{,}1$.

3) ⓐ $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{1{,}1 \times 1{,}096^n}$ $n \in \mathbb{N}$

ⓑ 2020 correspond à v_{10}
$v_{10} = 1{,}1 \times 1{,}096^{10} \approx 2{,}751$

En 2020 le prix de 500 kg d'alliage sera de 2,751 millions d'euros environ

4) $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$
$= \dfrac{v_0 - v_{11}}{1 - 1{,}096} = v_0 \times \dfrac{1 - 1{,}096^{11}}{1 - 1{,}096} = 1{,}1\left(\dfrac{1 - 1{,}096^{11}}{-0{,}096}\right)$

$= \dfrac{1{,}1}{0{,}096}\left(1{,}096^{11} - 1\right) \approx 19{,}949$

Le prix Total de 2010 à 2020 est de 19,949 millions environ.

5) $v_n \geq 10$
$\Leftrightarrow 1{,}1 \times 1{,}096^n \geq 10$

$v_{24} \approx 9{,}93$
$v_{25} \approx 10{,}88$

A partir de 2035, le prix de l'alliage dépassera les 10 millions d'€.

Ex 4 : 1) a)
$$\begin{cases} u_0 = 1500 \text{ (employés le 1/01/2012)} \\ u_1 = \frac{90}{100} \times 1500 + 100 = 1450 \text{ (le 1/1/2013)} \\ u_2 = 0,9 \times 1450 + 100 = 1405 \text{ (le 1/1/2014)} \end{cases}$$

b) $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ $\qquad \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique

c) $\boxed{u_{n+1} = 0,9\, u_n + 100}$ $(n \in \mathbb{N})$

$\to$ 100 nouveaux employés / an

10% partent à la retraite donc 90% restent

2) $\boxed{v_n = u_n - 1000}$ $(n\in\mathbb{N})$

a) $v_0 = 500 \quad v_1 = 450 \quad v_2 = 405$

b) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = 0,9\, u_n + 100 - 1000$
$= 0,9\, u_n - 900 = 0,9(u_n - 1000) = 0,9\, v_n$

donc (v_n) est géométrique de raison 0,9 de terme initial $v_0 = 500$

c) $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,9^n \quad n\in\mathbb{N}$

d) $u_n = v_n + 1000 = \boxed{500 \times 0,9^n + 1000}$ $(n\in\mathbb{N})$

3) a) $\boxed{u_{n+1} - u_n} = (500 \times 0,9^{n+1} + 1000) - (500 \times 0,9^n - 1000)$
$= 500 \times 0,9^{n+1} - 500 \times 0,9^n$
$= 500 \times 0,9^n \times (0,9 - 1)$
$= -0,1 \times 500 \times 0,9^n = \boxed{-50 \times 0,9^n}$

$\left.\begin{matrix} -50 < 0 \\ 0,9^n > 0 \end{matrix}\right\}$ donc $u_{n+1} - u_n < 0 \iff \boxed{u_{n+1} < u_n}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante

b) $1500 - 300 = 1200$

Il s'agit de résoudre $u_n \leq 1200$

$\iff 500 \times 0,9^n + 1000 \leq 1200$

$\iff 500 \times 0,9^n \leq 200 \iff \boxed{0,9^n \leq 0,4}$

$\begin{cases} 0,9^8 > 0,4 \\ 0,9^9 < 0,4 \end{cases}$

A partir de 2021 l'entreprise ~~ne~~ sera plus en sureffectif