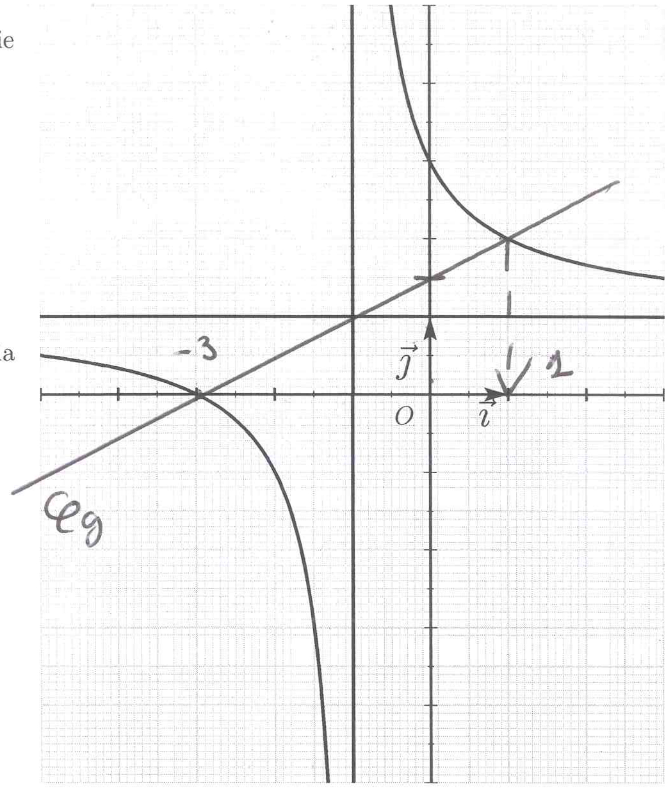
1S - AP - Fonctions

Exercice 1

Soit un repère du plan. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

Ci-joint la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f.



1. (a) Trouver a et b réels tels que pour $x \neq 1$,

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1}$$

   (b) Déterminer la position relative entre $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

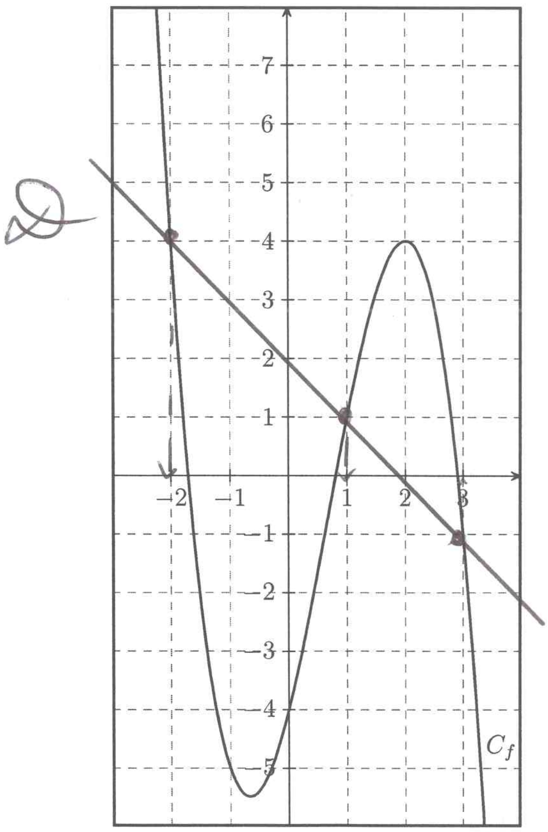
   et $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique.

   (a) Tracer $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-joint.

   (b) Résoudre algébriquement $f(x) = g(x)$ et interpréter graphiquement.

   (c) Résoudre algébriquement $f(x) \leq g(x)$ et interpréter graphiquement.

Exercice 2



On donne $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 4$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative ci-jointe.

1. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$ sur le graphique ci-joint.
2. Soit $P(x) = f(x) - (-x + 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   (a) Vérifier que 1 est racine de P et factoriser $P(x)$.
   (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
   (c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

AP - Fonctions

Ex 1 $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1) ⓐ $a + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b}{x+1} = \frac{ax+(a+b)}{x+1} = f(x)$

$\iff ax + (a+b) = x+3$

$\iff \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ Donc $\boxed{f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}}$

ⓑ Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - 1$

$f(x) - 1 = \frac{2}{x+1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\frac{2}{x+1}$		$-$	$\|$	$+$	

• $x < -1$ $\quad f(x) - 1 < 0$
$\iff f(x) < 1$
C_f est au-dessous de $D : y = 1$

• $x > -1$ $\quad C_f$ est au-dessus de D.

2) $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$ fonction affine

ⓐ $C_g : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ droite

ⓑ $f(x) = g(x) \iff \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+3}{2}$

sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad \iff 2(x+3) = (x+1)(x+3)$

$\iff 2(x+3) - (x+1)(x+3) = 0$

$\iff (x+3)\left[2 - (x+1)\right] = 0$

$\iff \boxed{(x+3)(1-x) = 0}$

$\iff x = -3$ ou $x = 1$ $\quad \boxed{S = \{-3 ; 1\}}$

C_f et C_g se coupent en 2 points d'abscisses -3 et 1.

ⓒ $f(x) \leq g(x) \iff f(x) - g(x) \leq 0$

$\iff \frac{x+3}{x+1} - \frac{x+3}{2} \leq 0$

$\iff \boxed{\frac{(x+3)(1-x)}{2(x+1)} \leq 0}$

$\boxed{S = [-3 ; -1[\cup [1 ; +\infty[}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$2(x+1)$		$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

C_f est au-dessous de C_g pour $-3 \leq x < -1$ et $x \geq 1$

Ex 2 : $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 4$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

1) $\mathcal{D} : y = -x + 2$

2) $P(x) = f(x) - (-x+2) = \underline{-x^3 + 2x^2 + 5x - 6}$

a) $P(1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$

1 est racine de P

donc $\boxed{P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)}$

$= ax^3 + bx^2 + cx$

$\quad -ax^2 - bx - c$

$= \underline{ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c}$

par identification des coefficients

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b - a = 2 \\ c - b = 5 \\ -c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ 6 - 1 = 5 \text{ vérifié} \\ c = 6 \end{cases}$$

Donc $\boxed{P(x) = (x-1)(-x^2 + x + 6)}$

b) il s'agit de résoudre $f(x) = -x + 2$

c'est à dire $f(x) - (-x+2) = 0$

ou $P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $-x^2 + x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{x = 1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 3}$

$y_1 = -1 + 2 = 1$; $y_2 = -(-2) + 2 = 4$; $y_3 = -3 + 2 = -1$

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en $A(-2;4)$, $B(1;1)$ et $C(3;-1)$

c) il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - (-x+2)$

c'est à dire le signe de $P(x)$.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2 + x + 6$ ($a = -1$)		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

du signe de a à l'extérieur des racines

$$\begin{cases} \text{sur }]-\infty; -2] \cup [1;3], \ f(x) \geq (-x+2) \\ \quad \underline{\mathcal{C} \text{ est au-dessus de } \mathcal{D}} \\ \text{sur } [-2; 1[\cup]3; +\infty[\ f(x) < (-x+2) \\ \quad \underline{\mathcal{C} \text{ est au-dessous strictement de } \mathcal{D}} \end{cases}$$

Ex3 : $f(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{4x+3}{x-2}$

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) $f(x) = g(x) \iff \dfrac{-2x}{x+1} = \dfrac{4x+3}{x-2}$

$x \neq -1$
$x \neq 2$

$\iff -2x(x-2) = (4x+3)(x+1)$

$\iff -2x^2 + 4x = 4x^2 + 7x + 3$

$\iff 0 = 6x^2 + 3x + 3$ $\qquad \Delta = 1 - 4 \times 2 \times 1$

$\iff \boxed{0 = 2x^2 + x + 1}$ $\qquad \Delta < 0$

L'équation n'admet aucune solution donc C_f et C_g ne se coupent pas.

3) Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$

$$f(x) - g(x) = \frac{-2x}{x+1} - \frac{4x+3}{x-2} = \frac{-2x(x-2) - (x+1)(4x+3)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{-6x^2 - 3x - 3}{(x+1)(x-2)} = \frac{-3(2x^2 + x + 1)}{x^2 - x - 2}$$

$2x^2 + x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}$ du signe de $a = 2$

x	$-\infty$ -1		2 $+\infty$
-3	$-$	$-$	$-$
$2x^2 + x + 1$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - x - 2$ ($a = 1$)	$+$ signe de a	$-$ signe de $-a$	$+$ signe de a
$f(x) - g(x)$	$-$	$+$	$-$

- sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]2 ; +\infty[$ $\quad f(x) - g(x) < 0$
  donc C_f est au-dessous de C_g
- sur $]-1 ; 2[$ $\quad f(x) - g(x) > 0$
  donc C_f est au-dessus de C_g

Ex 4 : $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$ $\mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1) • $f(1+x) = \dfrac{(1+x)^2 - 7(1+x) + 10}{(1+x) - 1} = \dfrac{1 + 2x + x^2 - 7 - 7x + 10}{x}$

$x \neq 0$ $= \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

• $f(1-x) = \dfrac{(1-x)^2 - 7(1-x) + 10}{(1-x) - 1} = \dfrac{1 - 2x + x^2 - 7 + 7x + 10}{-x}$

$= \dfrac{x^2 + 5x + 4}{-x} = \dfrac{-x^2 - 5x - 4}{x}$

$\dfrac{1}{2}\left[f(1+x) + f(1-x)\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x} + \dfrac{-x^2 - 5x - 4}{x}\right]$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-10x}{x} = -5 = y_I$

donc $I(1;-5)$ centre de symétrie de $\mathcal{C}f$

2) $ax + b + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{(ax+b)(x-1) + c}{x-1} = \dfrac{ax^2 + (b-a)x - b + c}{x - 1} = f(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -7 \\ -b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 4 \end{cases}$ $\boxed{f(x) = x - 6 + \dfrac{4}{x-1}}$

3) $f(x) - (x - 6) = \dfrac{4}{x-1}$ soit $\mathcal{D} : y = x - 6$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\dfrac{4}{x-1}$	$-$	$\Vert$	$+$

$\mathcal{C}f$ est au-dessous de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty;1[$
et $\mathcal{C}f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $]1;+\infty[$