Ensembles de Points

1) a) $\mathcal{E}_1 = \{M / \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 10\}$ $\quad\left\{\begin{array}{l} AB = 6 \\ I \text{ milieu de } [AB] \end{array}\right.$

$M \in \mathcal{E}_1 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 10$

$\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 10$ $\quad$ H projeté orthogonal de M sur (AB)

$10>0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaires de même sens

$\iff AB \times AH = 10 \iff 6 \times AH = 10 \iff AH = \frac{5}{3}$

H déterminé de manière unique

$\mathcal{E}_1$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

b) $\mathcal{E}_2 = \{M / \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -12\}$

$M \in \mathcal{E}_2 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -12$ $\quad$ K projeté orthogonal de M sur (AB)

$\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK} = -12$

$-12<0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ colinéaires de sens contraires

$\iff -AB \times AK = -12 \iff -6 \times AK = -12 \iff \boxed{AK = 2}$

K déterminé de manière unique

$\mathcal{E}_2$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par K.

2) a) $\mathcal{F}_1 = \{M / \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0\}$

$M \in \mathcal{F}_1 \iff (MA) \perp (MB) \iff AMB$ est rectangle en M.

$\mathcal{F}_1$ est le cercle de diamètre [AB]

b) $\mathcal{F}_2 = \{M / \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -9\}$ $\quad$ I milieu de [AB] $\iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}}_{\vec{0}}) + \overrightarrow{IA}\cdot(-\overrightarrow{IA})$

$= MI^2 + 0 - IA^2$ $\quad$ $IA = \frac{1}{2} AB = 3$

$= MI^2 - 9$

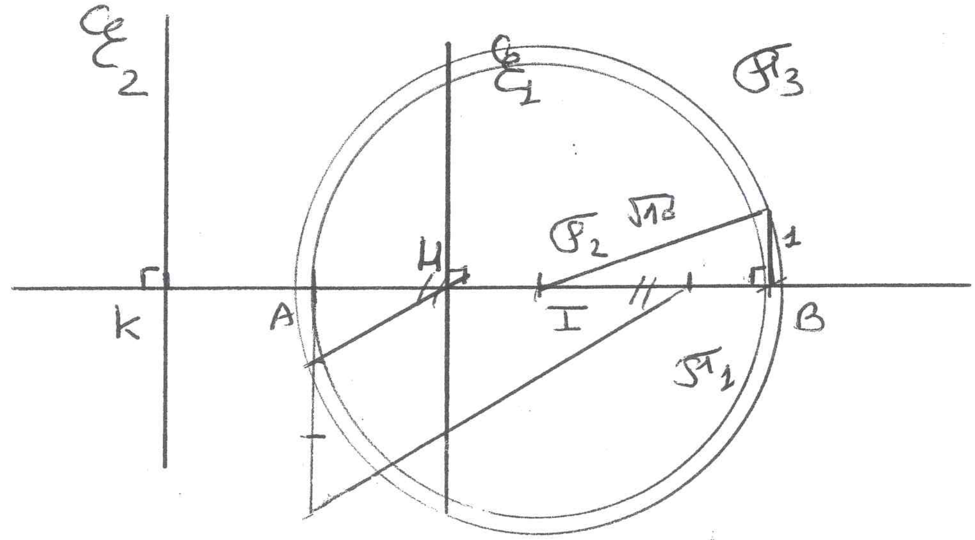
$M \in \mathcal{F}_2 \iff MI^2 - 9 = -9$

$\iff MI^2 = 0 \iff M = I \qquad \underline{\mathcal{F}_2 = \{I\}}$

b) $\mathcal{F}_3 = \{M / \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 1\}$

$M \in \mathcal{F}_3 \iff MI^2 - 9 = 1 \qquad \underline{\mathcal{F}_3 = \mathcal{C}(I; \sqrt{10})}$

$\iff MI^2 = 10 \iff MI = \sqrt{10}$



<u>Ex2</u>: $AB = 4$ $\quad I$ milieu de $[AB]$ donc $IB = IA$

1) $\underline{MA^2 - MB^2} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + IA^2 - MI^2 - 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} - IB^2$

$= 2\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI})$

$= 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} = 2(-\overrightarrow{IM}\cdot -\overrightarrow{AB}) = \underline{2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}}$

2) a) $MA^2 - MB^2 = 16 \iff 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 16$

$\iff \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 8 \qquad$ H projeté orthogonal

$\iff \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB} = 8 \qquad$ de M sur (AB)

$8 > 0$ donc $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires de même sens

$\iff IH \times AB = 8$

$\iff IH \times 4 = 8$

$\iff IH = 2$

donc H

et l'ensemble de points est la droite
perpendiculaire à (AB) passant par

ⓑ $MA^2 - MB^2 = -8 \iff 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = -8$

$\iff \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = -4$ K projeté orthogonal de M sur (AB)

$\iff \overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{AB} = -4$

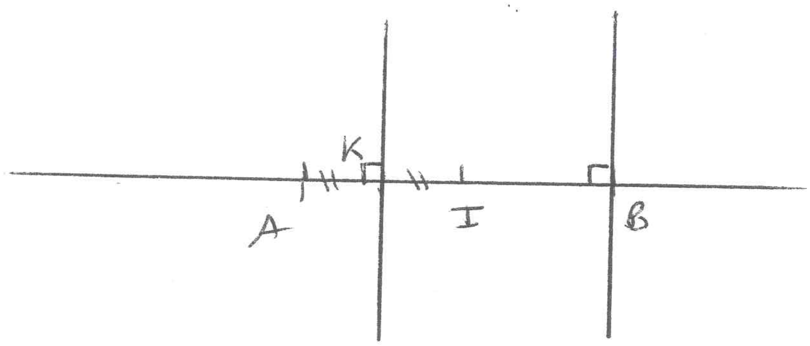
$-4<0$ donc $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires de sens contraires

$\iff -IK \times AB = -4$

$\iff IK \times 4 = 4$

$\iff IK = 1$

l'ensemble des points est la droite perpendiculaire à (AB) passant par K. milieu de [AI]



Ex3: $AB=4$ I milieu de [AB]

1) $MA^2+MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ théorème de la médiane

$= 2MI^2 + \frac{1}{2}\times 16$

$= 2MI^2 + 8$

2) ⓐ $MA^2+MB^2 = 20 \iff 2MI^2+8 = 20 \iff MI^2 = 6$

$\iff \boxed{MI = \sqrt{6}}$

$M \in \mathscr{C}(I;\sqrt{6})$

ⓑ $MA^2+MB^2 = 8 \iff 2MI^2+8 = 8 \iff MI^2 = 0$

$\iff \boxed{I = M}$

ⓒ $MA^2+MB^2 = 6 \iff 2MI^2+8 = 6 \iff 2MI^2 = -2$

$\iff MI^2 = -1$ impossible

$\emptyset$.