1S - AP - Dérivation de fonctions composées

On considère u dérivable sur I et $n \in \mathbb{Z}$.

	Fonction f	Fonction dérivée f'	Dérivabilité
u et $x \mapsto x^n$	$f = u^n$	$f' = nu^{n-1}u'$	dérivable sur I et si $n < 0$, il faut $u \neq 0$
u et $x \mapsto \sqrt{x}$	$f = \sqrt{u}$	$f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	dérivable sur $\{x \in I \ / \ u(x) > 0\}$

Calculer la dérivée des fonctions suivantes
(on déterminera au préalable les ensembles de définition et de dérivabilité)

$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad g(x) = \dfrac{3x^3 - 6x + 5}{x^2 + 1}$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{3x - x^2}$

$i(x) = (2x^2 + 4x + 2)^5$ $\qquad j(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 6x + 1)^3$ $\qquad k(x) = (x^2 - qx + 7)^5$ avec $q \in \mathbb{R}$

$l(x) = \sqrt{3x - x^2}$ $\qquad m(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ $\qquad n(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - 2x}$

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)(x-2)}$ $\qquad \mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \{1;2\} = \mathcal{D}f'$ (quotient)

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x)(x^2 - 3x + 2) - (x^3 - 2x^2)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 4x^3 + 12x^2 - 8x - 2x^4 + 3x^3 + 4x^3 - 6x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x}{(x^2 - 3x + 2)^2}} = \frac{x(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$ 2 est racine

$$= \frac{x(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{x(x-2)(x-2)^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

2) $g(x) = \dfrac{3x^3 - 6x + 5}{x^2 + 1}$ $\qquad \mathcal{D}g = \mathbb{R} = \mathcal{D}g'$ (quotient)

$$g'(x) = \frac{(9x^2 - 6)(x^2 + 1) - (3x^3 - 6x + 5) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{9x^4 + 3x^2 - 6 - 6x^4 + 12x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \boxed{\frac{3x^4 + 15x^2 - 10x - 6}{(x^2 + 1)^2}}$$

3) $h(x) = \dfrac{1}{3x - x^2} = \dfrac{1}{x(3-x)}$ $\quad \mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{0 ; 3\} = \mathcal{D}_{h'}$

quotient

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$

$h'(x) = \dfrac{-(3-2x)}{(3x-x^2)^2} = \dfrac{2x-3}{(3x-x^2)^2}$

4) $i(x) = (2x^2 + 4x + 2)^5$ $\quad \mathcal{D}_i = \mathbb{R} = \mathcal{D}_{i'}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1} \times u'$

$i'(x) = 5\,(2x^2+4x+2)^4 \times (4x+4)$

$= 5\,(2x^2+4x+2)^4 \times 4(x+1)$

$= \boxed{20\,(x+1)(2x^2+4x+2)^4}$

5) $j(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 6x + 1)^3$ $\quad \mathcal{D}_j = \mathbb{R} = \mathcal{D}_{j'}$

$j'(x) = \dfrac{1}{2} \times 3\,(x^2-6x+1)^2 \times (2x-6)$

$= \dfrac{1}{2} \times 3\,(x^2-6x+1)^2 \times 2\,(x-3)$

$= \boxed{3\,(x-3)(x^2-6x+1)^2}$

6) $k(x) = (x^2 - 9x + 7)^5$ $\quad (9 \in \mathbb{R})$ $\quad \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k'} = \mathbb{R}$

$k'(x) = 5\,(x^2-9x+7)^4 \times (2x-9)$

$= \boxed{5\,(2x-9)(x^2-9x+7)^4}$

7) $\ell(x) = \sqrt{3x - x^2} = \sqrt{x(3-x)}$ $\quad (\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$3x - x^2$		0	$+$	0	$-$
$a = -1$	signe de a		signe de $-a$		signe de a

$\mathcal{D}_\ell = [0 ; 3]$

$\mathcal{D}_{\ell'} =]0 ; 3[$

$\ell'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3x-x^2}} \times (3-2x) = \dfrac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$

8) $m(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	$\|$	$+$		$+$	
$\dfrac{1-x}{1+x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$\mathcal{D}_m =]-1\,;1]$

$\mathcal{D}_{m'} =]-1\,;1[$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-1(1+x) - (1-x)\times 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

donc $m'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \times \dfrac{-2}{(1+x)^2} = \dfrac{-\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\sqrt{1-x}}$

9) $m(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-2x}$

$x \geqslant 0 \qquad 1-2x \geqslant 0 \iff -2x \geqslant -1 \iff x \leq 1/2$

$\mathcal{D}_m = [0\,;1/2]$ et $\mathcal{D}_{m'} =]0\,;1/2[$ somme

$$m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \times (-2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$