

Concettion du devoir n°9-1-S.

Ex 1: $A(3; -1)$
 $B(2; -4)$
 $C(-2; 1)$

1) I milieu de $[AB]$ alors $I(5/2; -5/2)$
 (d_1) médiatrice de $[AB]$
 $\Rightarrow (d_1) \perp (AB)$ et (d_1) passe par I

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $(d_1): -x - 3y + c = 0$
 $I \in (d_1) \Leftrightarrow -5/2 - 3 \times (-5/2) + c = 0$
 $\Leftrightarrow -5/2 + 15/2 + c = 0$
 $\Leftrightarrow c = -5$

Alors une équation de (d_1) est $-x - 3y - 5 = 0$
 ou encore $x + 3y + 5 = 0$

$D(-2; -1)$ $-2 + 3 \times (-1) + 5 = -2 - 3 + 5 = 0$ donc $D \in (d_1)$

2) (d_2) hauteur issue de A dans le triangle ABC
 $\Rightarrow (d_2) \perp (BC)$ et (d_2) passe par A

$\vec{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $(d_2): -4x + 5y + c = 0$
 $A \in (d_2) \Leftrightarrow -4 \times 3 + 5 \times (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = 17$

Alors une équation de (d_2) est $-4x + 5y + 17 = 0$

$E(-2; -5)$ $-4 \times (-2) + 5 \times (-5) + 17 = 8 - 25 + 17 = 0$ donc $E \in (d_2)$

3) F le point d'intersection de (d_1) et (d_2)

Ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} x + 3y + 5 = 0 & L_1 \\ -4x + 5y + 17 = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 5 \\ 17y + 37 = 0 & 4L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 26/17 \\ y = -37/17 \end{cases}$$

donc $F(26/17; -37/17)$

4) $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2)

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 15 - 4 = 11$

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\| \cos \alpha$ α l'angle formé par les droites (d_1) et (d_2)

$\|\vec{u}_1\|^2 = 9 + 1 = 10$

$\|\vec{u}_2\|^2 = 25 + 16 = 41$

Donc $11 = \sqrt{10} \sqrt{41} \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{11}{\sqrt{410}}$

Alors $\alpha \approx 57,1^\circ$ angle aigu.

$$\begin{aligned} \text{Ex 2: 1) } \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= (\vec{OI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{OI} + \vec{IB}) \\ &= OI^2 + \vec{OI} \cdot \vec{IB} + \vec{IA} \cdot \vec{OI} + \vec{IA} \cdot \vec{IB} \\ &= OI^2 + \vec{OI} \cdot (\vec{IB} + \vec{IA}) + \vec{IA} \cdot (\vec{IA}) \end{aligned}$$

$$I \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \vec{IB} + \vec{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IB} = -\vec{IA}$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OI^2 - IA^2} \quad 1,5$$

$$2) \mathcal{E} = \{M / \vec{MA} \cdot \vec{MB} = k\} \quad AB=4 \text{ donc } IA = \frac{1}{2} AB = 2$$

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow OI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow OI^2 - 4 = k \Leftrightarrow \boxed{OI^2 = k+4}$$

2 • si $k+4 > 0$ c'est à dire $\boxed{k > -4}$ et \mathcal{E} est le cercle de centre I de rayon $\sqrt{k+4}$

• si $k+4 = 0$ c'est à dire $\boxed{k = -4}$ et $\mathcal{E} = \{I\}$

• si $k+4 < 0$ c'est à dire $\boxed{k < -4}$ et $\mathcal{E} = \emptyset$

$$3) \text{ Pour } k=0, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow (OA) \perp (OB)$$

\mathcal{E} est sur le cercle de diamètre $[AB]$

$$\text{Ex 3: 1) } 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)^2 - 1 = \frac{2\sqrt{2}+4}{4} - \frac{4}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2x < \pi$$

$$\text{alors } 2x = \frac{\pi}{4} \quad \text{et } \boxed{x = \frac{\pi}{8}} \quad 1,5$$

$$2) \text{ Dans } \mathbb{R} \quad \cos(2x) - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x) - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$X = \sin x \quad X \in [-1; 1]$$

$$\text{il s'agit de résoudre } -2X^2 - X + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times (-2) \times 1 = 9 \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$X_1 = \frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2} \quad X_2 = \frac{1+3}{-4} = -1 \quad 1,5$$

$$\text{Alors } \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin x = -1$$

$$\text{soit } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(k, k', k'' \in \mathbb{Z})$$

$$\underline{S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k''\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi \right\}}$$

Ex 3: 1) $\mathcal{E} = \{M \mid 2MA^2 + 0M^2 - MB^2 = 68\}$ $A(3;6)$
 $B(0;6)$

a)
$$\begin{cases} MA^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 \\ \quad = x^2 - 6x + y^2 - 12y + 45 \\ MB^2 = (x-0)^2 + (y-6)^2 = x^2 + y^2 - 12y + 36 \\ OM^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$M(x;y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 2y^2 - 24y + 90 + x^2 + y^2 - x^2 - y^2 + 12y - 36 = 68$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12x - 12y + 54 = 68$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = 0}$

b) $\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 - 9 - 9 - 7 = 0$ \mathcal{E} est le cercle de centre $\Omega(3;3)$ de rayon 5
 $\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$

2) $C(-2; 1/2)$

$M(x;y) \in \mathcal{C}(C; 5/2) \Leftrightarrow CM^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1/2)^2 = \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - y + 1/4 = \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + 4x + y^2 - y - 2 = 0}$ Equation de \mathcal{C}

3) Pour trouver les coordonnées de I et J points d'intersection de \mathcal{E} et \mathcal{C} , on doit résoudre

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = 0 & (L_1) \\ x^2 + 4x + y^2 - y - 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$
 $(L_1) - (L_2)$ donne
 $-10x - 5y - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x + y + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{y = -2x - 1}$

Par substitution dans (L_2) , on obtient

$x^2 + 4x + (-2x-1)^2 - (-2x-1) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4x^2 + 4x + 1 + 2x + 1 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow 5x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{5x = 0 \text{ ou } x+2 = 0}$

$\begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 - 1 = -1 \\ x = -2 \text{ et } y = -2(-2) - 1 = 3 \end{cases}$

Donc \mathcal{C} et \mathcal{E} se coupent en $J(0;-1)$ et en $I(-2;3)$

4) a) T_J tangente à \mathcal{C} en $J(0; -1)$

$\Leftrightarrow T_J \perp (CJ)$ et $J \in T_J$

$\vec{CJ} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ vecteur normal donc $T_J: -3x - 4y + c = 0$

$$J \in T_J \Leftrightarrow 0 - 4 \times (-1) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{c = -4}$$

l'equation de T_J est $-3x - 4y - 4 = 0$

soit $\boxed{3x + 4y + 4 = 0}$

b) T'_J tangente à \mathcal{C} en J

$\Leftrightarrow T'_J \perp (CJ)$ et $J \in T'_J$

$\vec{CJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ vecteur normal de T'_J donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

c) $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T_J

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 4 \times 3/2 + (-3) \times 2 = 6 - 6 = 0$$

donc $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\boxed{T_J \perp T'_J}$

+0,5 Dessin