Correction du devoir n°7 - 15

Ex 1 : $-\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi - 4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$ la mesure principale est $\pi/2$

1 x 3 (0,75 + 0,25)

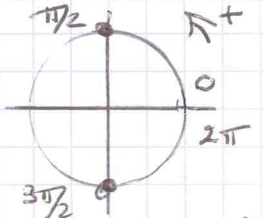
$\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi + 3\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$ la mesure principale est $3\pi/4$

$-\frac{127\pi}{3} = -\frac{120\pi - 7\pi}{3} = -40\pi - \frac{7\pi}{3} = -40\pi + \frac{-6\pi - \pi}{3}$

$= -40\pi - 2\pi - \pi/3$ la mesure principale est $-\pi/3$

$= -42\pi - \pi/3$

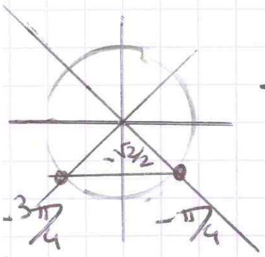
Ex 2 : 1) Dans $[0 ; 2\pi]$



$\cos x = 0 \iff \cos x = \cos \pi/2$

1

$S = \{\pi/2 ; 3\pi/2\}$

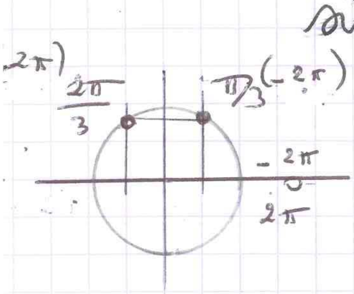


2) Sur $\mathbb{R}$ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$S = \left\{-\pi/4 + 2k\pi ; -\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi\right\}$ $k, k' \in \mathbb{Z}$

1,5

3) dans $[-\pi ; \pi]$ $-\pi \leq x \leq \pi \iff -2\pi \leq 2x \leq 2\pi$



$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin 2x = \sin \pi/3$

2

$\iff 2x = -\frac{5\pi}{3}$ ou $2x = -\frac{4\pi}{3}$

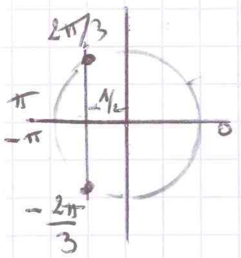
ou $2x = \frac{\pi}{3}$ ou $2x = \frac{2\pi}{3}$

$\iff x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$

ou $x = \pi/6$ ou $x = \pi/3$

$S = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{2\pi}{3} ; \pi/6 ; \pi/3\right\}$

1,5



4) $\cos(\pi - x) = 1/2$ dans $[-\pi ; \pi]$

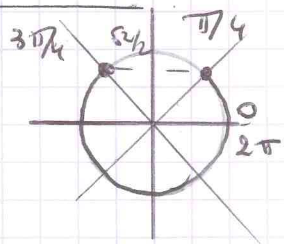
$\iff -\cos x = 1/2$

$\iff \cos x = -1/2$

$\iff \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$S = \left\{-\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right\}$

Ex 3 : 1) dans $[0 ; 2\pi[$ $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



1,5

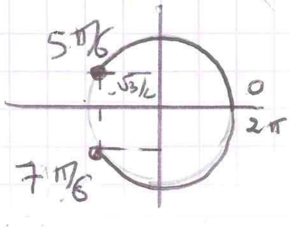
$S = [0 ; \pi/4] \cup \left[\frac{3\pi}{4} ; 2\pi\right[$

2 2) $-2\sqrt{3} \cos x < 3$ dans $[0 ; 2\pi[$

$\iff \cos x > -\frac{3}{2\sqrt{3}}$

$\iff \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left[0 ; \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{6} ; 2\pi\right[$



Ex4 : Dans $\mathbb{R}$ $\quad 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

On pose $X = \cos x \qquad X \in [-1;1]$

l'équation devient $2X^2 + 3X - 2 = 0$ 0,5

$\Delta = 9 - 4\times 2\times(-2) = 25 \qquad \sqrt{\Delta} = 5$

$\begin{cases} X_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 & \text{ne convient pas } -2 \notin [-1;1] \\ X_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ 0,5 0,5

Donc $\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

$S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{3} + 2k'\pi \right\}$ $k, k' \in \mathbb{Z}$ 1

Ex5 : 1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(-x) + \sin(\pi - x)$

$= -\sin x - (-\sin x) + \sin x = \sin x$ 1

2) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$ 1

Ex6 : 1) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$A \in \mathcal{C}(O;1)$

0,25 donc $x_A = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_A = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$I(1;0)$

0,5 B milieu de $[IA]$ donc $\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_I}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y_B = \frac{y_A + y_I}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$

2) $OB^2 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7+4\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

0,5 donc $\boxed{OB = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

3) • le triangle OAI est isocèle en O, B milieu de $[IA]$

donc (OB) est la bissectrice de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$

alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + 2k\pi$

0,75 $\boxed{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$

0,25 • (OB) est aussi la hauteur issue de O

donc OBI est un triangle rectangle en B

0,75 $\cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{OB}{OI} = OB$ soit $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$