Devoir de mathématiques n^o 6 - 1èreS

15 janvier 2013 - 2h

Exercice 1 (4 pts)

Dans cet exercice, il n'est pas demandé de justifier la dérivabilité des fonctions à étudier.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 30x^2 - 84x + 2$.

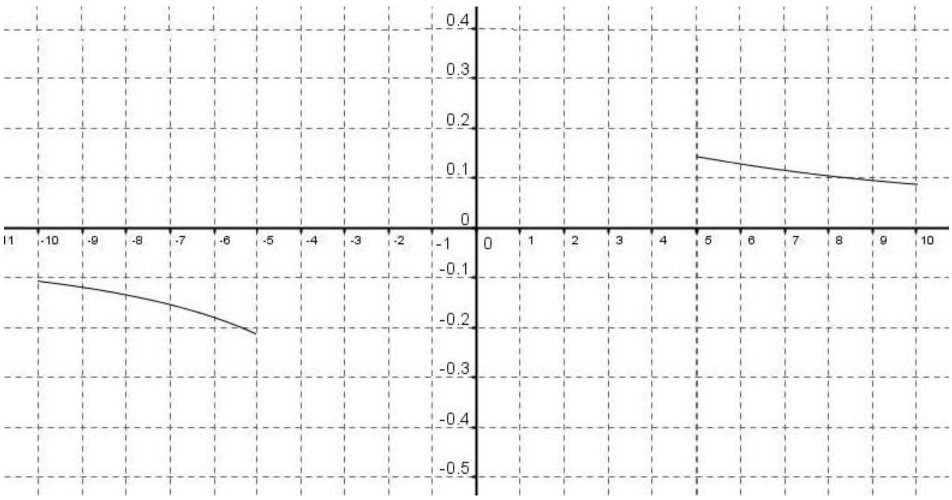
1. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^3 + 3x^2 + 15x - 21$.
   Déterminer le signe de $g(x)$ avec la méthode de votre choix (traiter **une seule des deux questions ci-dessous**)
   (a) Méthode 1 : Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.
   Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.
   (b) Méthode 2 : Calculer $g(1)$ puis déterminer a, b et c tels que $g(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   En déduire le signe de $g(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

Exercice 2 (6 pts)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-10; 10]$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$.

On note C_f sa courbe représentative partiellement tracée dans le repère orthogonal ci-dessous.

1. Justifier la dérivabilité de f sur $[-10; 10]$, puis calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   On donnera les valeurs exactes des extremums.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_f au point A d'abscisse 1.
3. Compléter le tracé de C_f dans le repère ci-dessous en traçant les tangentes parallèles à l'axe des abscisses, et la droite T.



Exercice 3 (5 pts)

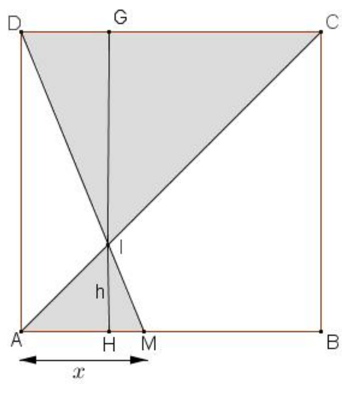
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm.

Pour tout M de $[AB]$, on nomme I le point d'intersection de $[DM]$ et $[AC]$.

H est le pied de la hauteur issue de I dans AIM et G est le pied de la hauteur issue de I dans DIC.

x est la longueur AM, et $A(x)$ est l'aire totale des deux triangles AMI et DIC.

Toutes les questions sont indépendantes.



1. Calculer $A(0)$ et $A(4)$.
2. Soit h la hauteur issue de I dans le triangle AMI.
   Montrer, en utilisant Thalès, que $\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{x}{4}$ et que $\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{h}{4-h}$;
   En déduire que $\dfrac{h}{4-h} = \dfrac{x}{4}$ puis que $h = \dfrac{4x}{x+4}$.
3. Montrer que $A(x) = \dfrac{2(x^2+16)}{x+4}$ sur $[0; 4]$.
4. Etudier le sens de variation de la fonction A, et en déduire la position de M assurant une aire minimale.

Exercice 4 (2 pts)

Une fonction homographique est définie par une relation de la forme $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, a et c différents de 0.
On donne $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
Compléter l'algorithme ci-contre permettant de calculer le nombre dérivé pour une valeur x saisie par l'utilisateur.

```
Algorithme
Variables
    a est un réel;



début
    Lire : a;



    si  _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _  alors
        Afficher : f n'est pas définie pour cette valeur de x;
    sinon


    fin
fin
```

Exercice 5 (3 pts)

On considère un édifice de forme parabolique dont la parabole est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-\sqrt{18}; \sqrt{18}]$ par $f(x) = 9 - 0,5x^2$.
L'édifice est surmonté d'un mat vertical (segment $[AB]$).
Un observateur, placé sur l'axe des abscisses, dont les yeux (point F) sont à 2 mètres du sol, regarde vers le haut de l'édifice, et se déplace vers l'édifice.
A partir de quelle position sur l'axe des abscisses ne pourra-t-il plus voir le haut du mat (point B) ?
Toute trace de recherche, y compris sur le graphique sera prise en compte dans la notation.