Correction du devoir n° 6 - 1-S

Ex1 : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 30x^2 - 84x + 2$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

1) $g(x) = 3x^3 + 3x^2 + 15x - 21$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

ⓐ g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 3

0,5 $g'(x) = 3\times 3x^2 + 3\times 2x + 15 = \boxed{3(3x^2+2x+5)}$

du signe de $(3x^2+2x+5)$

$\Delta = 4 - 4\times 3\times 5$

$\Delta < 0$ donc $3x^2+2x+5 > 0$ du signe de $a = 3$

1 alors $g'(x) > 0$ et g strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0,25 $g(1) = 3 + 3 + 15 - 21 = 0$

donc pour $x \geq 1$, $g(x) \geq g(1)$ soit $g(x) \geq 0$

0,75 et pour $x \leq 1$, $g(x) \leq g(1)$ soit $g(x) \leq 0$

ⓑ autre méthode

0,25 $g(1) = 0$ donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

1,5 Par identification, $\begin{cases} a = 3 \\ b - a = 3 \\ c - b = 15 \\ -c = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ 21 - 6 = 15 \text{ vérifié} \\ c = 21 \end{cases}$

Alors $g(x) = (x-1)(3x^2+6x+21) = 3(x-1)(x^2+2x+7)$

Soit $P(x) = x^2 + 2x + 7$ $\quad \Delta = 4 - 4\times 7$ $\quad \Delta < 0$

1 donc $P(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ du signe de $a = 1$

Alors $g(x)$ est du signe de $(x-1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) $f'(x) = 3\times 4x^3 + 4\times 3x^2 + 30\times 2x - 84$

$= 12x^3 + 12x^2 + 60x - 84 = 4(3x^3 + 3x^2 + 15x - 21)$

0,5 $= 4\times g(x)$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ $\quad 4 > 0$

1

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-45	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 3 + 4 + 30 - 84 + 2$
$= 39 - 84 = -45$

Ex2 : $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$ $\quad D_f = [-10;10]$

1) f est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables sur D_f. $x^2+3 \neq 0$

$f = \dfrac{u}{v}$ $\quad f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1(x^2+3) - (x-1)\times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2+2x}{(x^2+3)^2}$$

1 $\boxed{f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}}$ $\quad (x^2+3)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $N(x) = -x^2+2x+3$
$= (x+1)(-x+3)$

x	-10		-1		3		10
1 $a=-1$ $f'(x)$		$-$ signe de a	0	$+$ de $-a$	0	$-$ signe de a	
1 $f(x)$	$\frac{-11}{103}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	$\frac{9}{103}$

$f(3) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

$f(10) = \dfrac{9}{103} \simeq 0,1$

$f(-10) = \dfrac{-11}{103} \simeq 0,1$

$\frac{-1}{2}$ est le minimum pour f sur $[-10;10]$ atteint pour $x=-1$ et $1/6$ est le maximum pour f sur $[-10;10]$ atteint pour $x=3$.

2) $A(1;0) \in C_f$

T : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $\quad \begin{cases} f'(1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \\ f(1) = 0 \end{cases}$

$y = \frac{1}{4}(x-1)$

1 $\boxed{y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$

C_f 1 $\quad$ T 0,5 $\quad$ tgtes//(Ox) 0,5

Ex4 : Variables

0,5 a est un réel ; b est un réel ; c est un réel ;
d est un réel ; x est un réel ;

Début

0,5 Lire a ; lire b ; lire c ; lire d ; lire x ;

0,5 si $x = -d/c$ alors
  afficher f n'est pas définie pour cette valeur de x ;
sinon
0,5 afficher le nombre dérivé de f en x est $(ad-bc)/(cx+d)^2$;
finsi
fin

Ex3 : 1) Quand $x=0$, A et M sont confondus
le triangle AIM n'existe pas
et le triangle DIC devient DAC
donc $\boxed{A(0)} = \frac{AD^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (cm²)

0,5

quand $x=4$, M et B sont confondus, $\boxed{A(4) = 8}$ (cm²)
moitié du carré.

2) • (DM) et (AC) sont sécantes en I
D, I, M et C, I, A dans cet ordre
(DC) // (AM) (côtés du carré)
D'après la propriété de Thalès : $\frac{IM}{ID} = \frac{IA}{IC} = \frac{AM}{DC}$
soit $\boxed{\frac{IM}{ID} = \frac{x}{4}}$

1 • de même (GH) et (DM) sont sécantes en I
G, I, H et D, I, M dans cet ordre
(DG) // (HM)
D'après la propriété de Thalès : $\frac{IM}{ID} = \frac{IH}{IG} = \frac{HM}{DG}$
soit $\boxed{\frac{IM}{ID} = \frac{h}{4-h}}$

Alors $\frac{x}{4} = \frac{h}{4-h} \iff x(4-h) = 4h$
$\iff 4x - xh = 4h$
$\iff 4x = x h + 4h$

0,5 $\iff 4x = h(x+4) \iff \boxed{h = \frac{4x}{x+4}}$

3) $A(x) = \frac{AM \times IH}{2} + \frac{DC \times IG}{2} = \frac{x \times h + 4(4-h)}{2}$

$= \frac{1}{2} xh + 2(4-h) = \frac{1}{2} x \times \frac{4x}{x+4} + 8 - 2 \times \frac{4x}{x+4}$

$= \frac{2x^2}{x+4} + 8 - \frac{8x}{x+4} = \frac{2x^2 + 8(x+4) - 8x}{x+4} = \frac{2x^2+32}{x+4}$

1 $\boxed{A(x) = \frac{2(x^2+16)}{x+4}}$ $x \in [0;4]$
car $M \in [AB]$ et $AB = 4$ cm

4) A est dérivable sur $[0;4]$ (fonction rationnelle
avec $x+4 \neq 0$

1 $A'(x) = \frac{4x(x+4) - 2(x^2+16) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{2x^2 + 16x - 32}{(x+4)^2} = \boxed{\frac{2(x^2+8x-16)}{(x+4)^2}}$

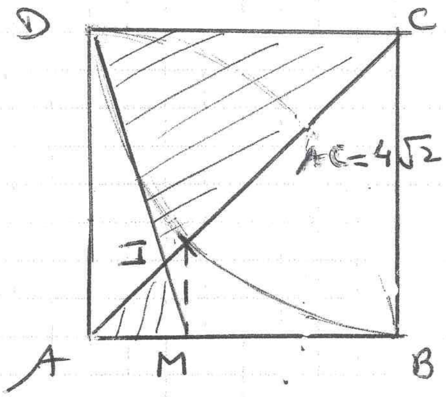
$\left.\begin{array}{l} 2>0 \\ (x+4)^2>0 \end{array}\right\}$ donc $A'(x)$ est du signe de

$P(x) = x^2+8x-16$

$\Delta = 64-4\times(-16) = 128 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$x_1 = \dfrac{-8-8\sqrt{2}}{2} = -4-4\sqrt{2} < 0$ ne convient pas

$x_2 = \dfrac{-8+8\sqrt{2}}{2} = -4+4\sqrt{2} = 4(\sqrt{2}-1)$



x	0		$4(\sqrt{2}-1)$		4
$a=1$ $A'(x)$		signe de $-a$	0	$+$ signe de a	
$A(x)$	8	$\searrow$	$A(4\sqrt{2}-4)$	$\nearrow$	8

L'aire est minimale pour $x = 4(\sqrt{2}-1)$

Ex5 : L'observateur ne verra plus le mât quand (BF) sera tangente à C_f graphiquement, on lit que l'observateur se trouve à environ $x = 4{,}5$.

- $f(x) = 9-0{,}5x^2 \qquad D_f = [-\sqrt{18} ; \sqrt{18}]$
  $f'(x) = -0{,}5\times 2x = -x$
- La tangente T à C_f en un point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$
  $y = -a(x-a)+(9-0{,}5a^2)$
  $y = -ax+a^2+9-0{,}5a^2$
  $\boxed{y = -ax+(9+0{,}5a^2)}$
- $B(0;11) \in T \iff 9+0{,}5a^2 = 11$
  $\iff 0{,}5a^2 = 2 \iff a^2 = 4 \iff a = 2$ car $a>0$, $a \geq \sqrt{18}$

Donc T : $\boxed{y = -2x+11}$

- L'observateur « se trouve » à 2 m du sol donc $y_F = 2$ et $F \in T$ alors $2 = -2x_F+11$
  $\iff 2x_F = 9$
  $\iff \boxed{x_F = 4{,}5}$

Donc l'observateur ne voit plus le sommet du mât pour $\boxed{\sqrt{18} \leq a < 4{,}5}$