Correction du devoir n° 2 – 1 S

Ex 1 : $f(x) = x^2 - 4x - 3$ et $g(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$

1) $\boxed{P(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4}$ $x \in \mathbb{R}$

$P(4) = 64 - 6\times 16 + 28 + 4 = 0$ donc 4 est racine de P

et il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = (x-4)(ax^2+bx+c)$

$(x-4)(ax^2+bx+c)$
$= ax^3 + bx^2 + cx$
$\quad -4ax^2 - 4bx - 4c$
$= ax^3 + (b-4a)x^2 + (c-4b)x - 4c$
$= P(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -6 \\ c - 4b = 7 \\ -4c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \\ b = -2 \\ -1 - 4\times(-2) = 7 \text{ vérifié} \\ c = -1 \end{cases}$

Donc $\boxed{P(x) = (x-4)(x^2 - 2x - 1)}$

2) Soit $Q(x) = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 - 4\times(-1) = 8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

deux racines $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-2x-1 ($a=1$)		$+$ signe de a	0	$-$ signe de $-a$	0	$+$ signe de a		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x) \geq 0$

$\boxed{S = [1-\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2}] \cup [4 ; +\infty[}$

$f(x) - g(x) = x^2 - 4x - 3 - (x^3 - 5x^2 + 3x + 1)$
$\quad = -x^3 + 6x^2 - 7x - 4 = -P(x)$

$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \Leftrightarrow 0 \leq P(x)$

donc $\boxed{\text{sur } [1-\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2}] \cup [4 ; +\infty[}$

Ex 2 : 1) points à placer 2) $(d) : -4x + y + 2 = 0$

x	0	1
y	-2	2

3) $\vec{u}(-2 ; 3)$ (d_1) de vecteur directeur $\vec{u}$

donc $(d_1) : 3x + 2y + c = 0$

$A(1 ; -2) \in (d_1) \Leftrightarrow 3 - 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$

alors $\boxed{(d_1) : 3x + 2y + 1 = 0}$

4) $(d_2) // (d)$ donc $(d_2) : -4x + y + c = 0$ même vecteur directeur que (d)

$C(-2 ; 8) \in (d_2) \Leftrightarrow 8 + 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -16$

alors $\boxed{(d_2) : -4x + y - 16 = 0}$

5) il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 & L_1 \\ -4x + y - 16 = 0 & L_2 \end{cases}$$

Alors (d_1) et (d_2) se coupent en $I(-3;4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x + 33 = 0 & L_1 - 2L_2 \\ -4x + y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$A(1;-2)$ $B(2;3)$ $I(-3;4)$

6) $AB^2 = (2-1)^2 + (3-(-2))^2 = 1 + 25 = 26$ $AB = \sqrt{26}$

7) $$\begin{cases} BI^2 = (2-(-3))^2 + (3-4)^2 = 25 + 1 = 26 \\ AI^2 = (-3-1)^2 + (4-(-2))^2 = 16 + 36 = 52 \end{cases}$$ $\boxed{BI = \sqrt{26} = AB}$

$AI^2 = AB^2 + BI^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABI est un triangle rectangle en B, de plus il est isocèle en B.

8) ⓐ $M(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow BM = AB \Leftrightarrow BM^2 = AB^2 = 26$

$\Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 26}$

ⓑ $(d) : -4x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 4x - 2}$ équation réduite

Pour trouver l'intersection de (d) et $\mathcal{C}$ il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} y = 4x - 2 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 26 \end{cases}$$

Par substitution, on obtient l'équation :

$((x-2)^2 + (4x-2-3)^2 = 26$

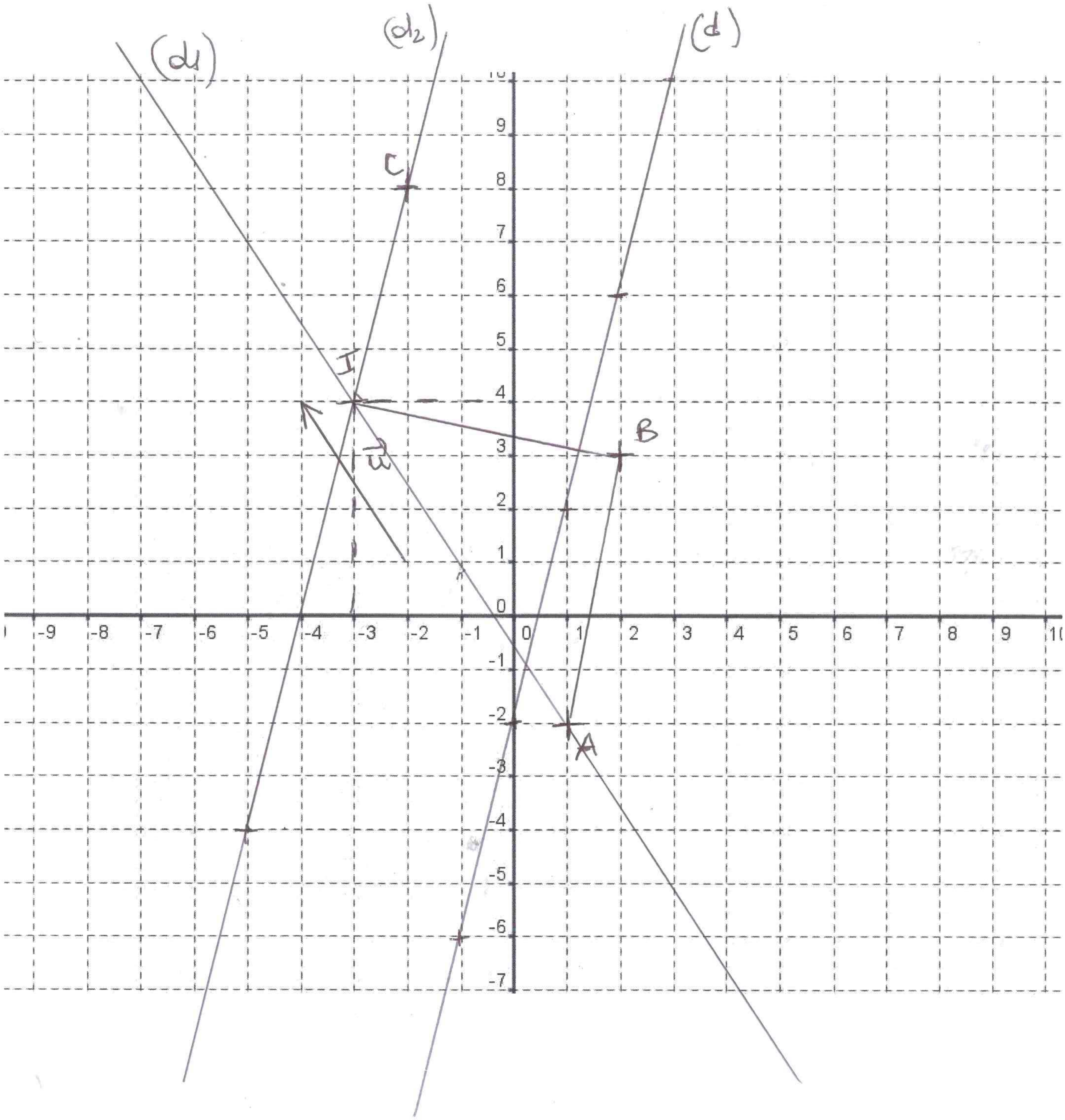
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 16x^2 - 40x + 25 = 26$

$\Leftrightarrow 17x^2 - 44x + 3 = 0$

$\Delta = 44^2 - 4 \times 17 \times 3 = 1732$

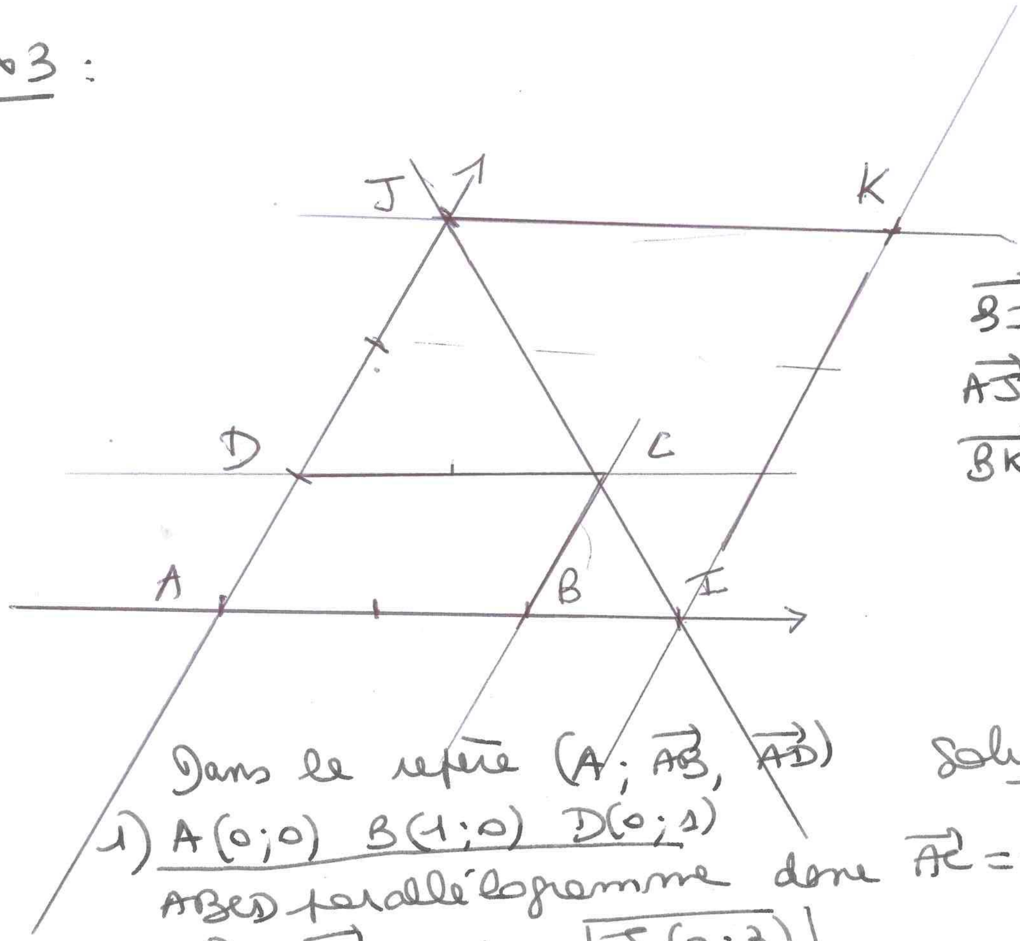
$\Delta > 0$

Donc l'équation admet 2 solutions alors $\mathcal{C}$ et (d) se coupent en 2 points dont les coordonnées sont les solutions au système.



(d1)
(d2)
(d)
C
I
B
A
$\vec{u}$

Ex 3 :



$\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{AJ} = 3\vec{AD}$

$\vec{BK} = \frac{1}{2}\vec{DC} + \frac{3}{2}\vec{DJ}$

Dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD})$ Solution analytique

1) $A(0;0)$ $B(1;0)$ $D(0;1)$

ABCD parallélogramme donc $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ $\boxed{C(1;1)}$

$\vec{AJ} = 3\vec{AD}$ donc $\boxed{J(0;3)}$

$\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AB}$ donc $\boxed{I(3/2;0)}$

$\vec{IJ}\begin{pmatrix}-3/2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{IC}\begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{IJ} = 3\vec{IC}$ $\vec{IJ}$ et $\vec{IC}$ sont colinéaires donc I, J et C sont alignés.

2) $\vec{DC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{DJ}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{BK}\begin{pmatrix}x_K-1\\y_K\end{pmatrix}$

$\vec{BK} = 1/2\,\vec{DC} + 3/2\,\vec{DJ} \iff \begin{cases} x_K - 1 = \frac{1}{2}\times 1 + 0 \\ y_K = 0 + \frac{3}{2}\times 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = 3/2 \\ y_K = 3 \end{cases}$

$\boxed{K(3/2;3)}$

$\vec{JK}\begin{pmatrix}3/2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{AI}\begin{pmatrix}3/2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{JK} = \vec{AI} \iff$ AIKJ est un parallélogramme

Autre méthode : 1) $\vec{IC} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DC}$

ABCD parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC}$

$= \vec{IB} + \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{AB}$

$= \boxed{-1/2\,\vec{AB} + \vec{AD}}$

$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = \vec{IB} + \vec{BA} + 3\vec{AD}$

$= -1/2\,\vec{AB} - \vec{AB} + 3\vec{AD}$

$= \boxed{-3/2\,\vec{AB} + 3\vec{AD}}$

On a $\vec{IJ} = 3\vec{IC}$ vecteurs colinéaires donc I, C, J alignés

Solution vectorielle

2) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$

$= -3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DJ}$

$= -3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ})$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2} \times 3\overrightarrow{AD}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cancel{- \frac{9}{2}\overrightarrow{AD}} \cancel{+ \frac{9}{2}\overrightarrow{AD}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JK} \Leftrightarrow$ AIKJ parallélogramme