Correction du devoir n°12 - 1.S

Ex1 : 1) $u_n = n^2 - 3n + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$

0,5 $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} u_1 - u_0 = -2 \\ u_2 - u_1 = 0 \end{matrix}\right\} \neq$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison r de 1er terme u_1.

- $u_{20} = u_{12} + 8 \times r \Leftrightarrow 49 = 25 + 8r \Leftrightarrow 8r = 24$
  $\Leftrightarrow r = 3$
- alors $u_{12} = u_1 + 11 \times r \Leftrightarrow u_1 = 25 - 33 \Leftrightarrow u_1 = -8$
- $u_n = u_1 + (n-1)\times r = -8 + 3(n-1) = -8 + 3n - 3$

0,75 $\boxed{u_n = -11 + 3n}$ $\quad n \geqslant 1$

- $u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \dfrac{(u_1 + u_{30})\times 30}{2} = \dfrac{(-8+79)\times 30}{2}$

0,75 avec $u_{30} = -11 + 3\times 30$ $= -11 + 90 = 79$ $\quad = 71 \times 15 = 1065$

3) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite géométrique de raison $q = 0,4$ de premier terme $u_0 = -3$ donc $u_{n+1} = u_n \times 0,4 \quad (n\in\mathbb{N})$

1 $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$
donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 16384 + 32768$
termes d'une suite géométrique de raison 2 de terme initial $u_0 = 1$

1 donc $S = \dfrac{1 - 32768 \times 2}{1-2} = 65535$

5) $u_n = n^3 - 2n^2 + 5n - 3 \quad (n\in\mathbb{N})$
Soit $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$
définie dérivable sur $[0;+\infty[$

1,5 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$
$\Delta = 16 - 4\times 3\times 5$
$\Delta < 0$ donc $f'(x) > 0$ du signe de $a = 3$

alors f croissante sur $[0;+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

6) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{n} - u_n = \frac{2u_n - n u_n}{n} = \frac{(2-n)u_n}{n}$$

$n > 0$ et $u_n > 0$

donc $(u_{n+1} - u_n)$ est du signe de $(2-n)$

1 Soit pour $n \geq 2$, $2 - n \leq 0$, (u_n) est décroissante

$(u_1 < u_2)$

A la calculatrice, on trouve $\begin{cases} u_{18} \approx 7 \times 10^{-10} \\ u_{19} \approx 8 \times 10^{-11} \end{cases}$

comme (u_n) est décroissante

0,5 donc $u_n < 10^{-10}$ à partir de $\boxed{n = 19}$

Ex2 : 1) Contrat 1 :

a) $\boxed{u_0 = 3600}$ (3600 € en 2000)

augmenter de 6% revient à multiplier par $(1 + 6/100) = 1{,}06$

0,5 donc $u_1 = 3600 \times 1{,}06 = 3816$ (2001) et $u_2 = 3816 \times 1{,}06 = 4044{,}96$ (2002)

b) $\boxed{u_{n+1} = u_n \times 1{,}06}$ $(n \in \mathbb{N})$

0,5 donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite géométrique de raison $1{,}06$ de terme initial $u_0 = 3600$

c) Alors $u_n = u_0 \times q^n$ soit $\boxed{u_n = 3600 \times 1{,}06^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

$u_6 = 3600 \times (1{,}06)^6 \approx 5107$

0,75 En 2006 le loyer annuel sera de 5107 €

d) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$= \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - 1{,}06} = u_0 \frac{1 - 1{,}06^{n+1}}{-0{,}06} = \boxed{60000(1{,}06^{n+1} - 1)}$$

1 $(n \in \mathbb{N})$

Somme payée à l'issue de $(n+1)$ années de contrat

2) Contrat 2 :

a) $\boxed{v_0 = 3600}$ (3600€ en 2000)

0,5

$v_1 = 3600 + 300$
$= 3900$ (en 2001)

$v_2 = 3900 + 300$
$= 4200$ (en 2002)

b) $v_{n+1} = v_n + 300 \quad (n \in \mathbb{N})$

0,5

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 300 de terme initial $v_0 = 3600$

c) alors $v_n = v_0 + n \times r$ soit $\boxed{v_n = 3600 + 300n}$
$(n \in \mathbb{N})$

0,75

$v_6 = 3600 + 300 \times 6 = 5400$

En 2006 le loyer annuel sera de 5400€

d) $A_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= \dfrac{(v_0 + v_n) \times (n+1)}{2} = \dfrac{(3600 + 3600 + 300n) \times (n+1)}{2}$

$= (3600 + 150n)(n+1)$

$= 10(360 + 15n)(n+1)$

1

$= \boxed{150(24+n)(n+1)}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Somme payée à l'issue de $(n+1)$ années de contrat.

3) $G_8 = 60000(1{,}06^9 - 1) \simeq 41368{,}74$

$A_8 = 150(24+8) \times 9 = 43200$

0,75

$G_8 < A_8$ A l'issue de 9 années le contrat 1 est le plus avantageux.

4) A la calculatrice, on programme au TABL

$Y1 : 60000(1{,}06^{x+1} - 1)$ et $Y2 : 150(24+x)(x+1)$

Xmin 0 Xmax 20 Scale 1.

0,75

Il s'agit de résoudre $G_n > A_n$.

On trouve $G_{16} < A_{16}$ et $\boxed{G_{17} > A_{17}}$

Donc le contrat 2 est plus avantageux à partir de la 18ème année Soit 2017

Ex3 : Partie A : pour $N=2$ « Test $k \leq N$ »

U	3	15/4	63/16	255/64
k	0	1	2	3

L'algorithme affiche $\frac{255}{64}$ 0,5

Partie B : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4} \times 3 + 3 = \frac{15}{4} \\ u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{15}{4} \times \frac{1}{4} + 3 = \frac{15}{16} + \frac{48}{16} = \frac{63}{16} \end{cases}$ 0,5

2) $\begin{cases} u_1 - u_0 = \frac{3}{4} \\ u_2 - u_1 = \frac{3}{16} \end{cases} \neq$ $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{4} \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{63/16}{15/4} = \frac{63}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{63}{60} \end{cases} \neq$

1

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique

3) $\boxed{v_n = u_n - 4}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4)$

donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n}$ $(n \in \mathbb{N})$

0,75 donc (v_n) est une suite géométrique de raison $1/4$

0,25 de 1er terme $v_0 = -1$ $(v_0 = u_0 - 4 = 3 - 4)$

b) $v_n = -1\left(1/4\right)^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$

0,5 alors $u_n = v_n + 4 = \boxed{4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

4) a) • $u_{n+1} = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

• $u_{n+1} - u_n = \left(4 - \left(1/4\right)^{n+1}\right) - \left(4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$= -\left(1/4\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n\left(1 - \frac{1}{4}\right)$

$= 3/4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

0,75

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) on a $u_3 \simeq 3{,}9843$ et $u_4 \simeq 3{,}996$.

0,5 Comme (u_n) est croissante, $\boxed{u_n \geq 3{,}99}$ pour $n \geq 4$

0,75 c) Algo.