Devoir de mathématiques n^o 10 - 1èreS

9 avril 2013 - 20 min

Exercice 1 (6 points)

Dans un repère orthonormal, les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont définis respectivement par les équations :

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 15 \text{ et } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice 2 (4 points)

A et B sont deux points distincts tels que $AB = 6$ (l'unité étant le centimètre).
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ pour $k = 11$ puis pour $k = -9$.

(soit I milieu de $[AB]$, on admet que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$)

Ex 1 $\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 2y = 15 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 2y = 15 & L_1 \\ x^2 - 6x + y^2 - 4y = -3 & L_2 \end{cases}$

$L_1 - L_2$ donne $2x + 6y = 18$
soit $x + 3y = 9$
et $\boxed{x = 9 - 3y}$

En remplaçant dans L_1, on obtient

$(9-3y)^2 - 4(9-3y) + y^2 + 2y = 15$

$\iff 81 - 54y + 9y^2 - 36 + 12y + y^2 + 2y = 15$

$\iff 10y^2 - 40y + 45 = 15$

$\iff 10y^2 - 40y + 30 = 0$

$\iff y^2 - 4y + 3 = 0$

$\iff (y-1)(y-3) = 0$

$\iff \boxed{y = 1}$ ou $\boxed{y = 3}$

Pour $\begin{cases} y = 1, \text{ on a } x = 9 - 3 = 6 \\ y = 3, \text{ on a } x = 9 - 9 = 0 \end{cases}$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en $I(6;1)$ et $(0;3)$

Ex 2 : $AB = 6$, I milieu de $[AB]$ donc $IA = \frac{1}{2}AB = 3$ (cm)

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 9$

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 11 \iff MI^2 - 9 = 11 \iff MI^2 = 20 \iff MI = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
c'est le cercle de centre I de rayon $2\sqrt{5}$ cm

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9 \iff MI^2 - 9 = -9 \iff MI^2 = 0 \iff M = I$
L'ensemble se réduit au point I