Correction du devoir n°8 - 1.5

Ex4 : Partie A /3,5

0,25 1) $f(1)=1$ car $A(1;1)\in \mathcal{C}_f$

0,5 $f'(1)=-1$ coefficient directeur de (d) tangente à $\mathcal{C}_f$ en A
$(\,(d) : y=-x+2\,)$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables avec $x\neq 0$

0,75 $f'(x)=\dfrac{(2x+a)\times x-(x^2+ax+b)\times 1}{x^2}=\dfrac{2x^2+ax-x^2-ax-b}{x^2}=\dfrac{x^2-b}{x^2}$

3) $f(1)=1 \iff \dfrac{1+a+b}{1}=1 \iff 1+a+b=1 \iff \boxed{a+b=0}$

1 $f'(1)=-1 \iff \dfrac{1-b}{1}=-1 \iff 1-b=-1 \iff -b=-2 \iff \boxed{b=2}$

alors $\boxed{a=-2}$ donc $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x}}$ et $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2}}$

1

Partie B /4,5

1) $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de (x^2-2)

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$ (0,5) $a=1$	||	$-$ signe de $-a$	0	$+$ signe de a	
$f(x)$ (0,5)	||	$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$	

$f(\sqrt{2})=\dfrac{2-2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=\dfrac{(4-2\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}$

0,5 $=\dfrac{4\sqrt{2}-4}{2}=\boxed{2\sqrt{2}-2}\simeq 0,83$

minimum pour f sur $]0;+\infty[$

2) $(d_1) : y=f'(2)\times(x-2)+f(2)$ $\quad f(2)=1 \quad f'(2)=\dfrac{1}{2}$

0,75 $y=\dfrac{1}{2}(x-2)+1$

$y=\dfrac{1}{2}x-1+1$ $\quad \boxed{y=\dfrac{1}{2}x}$ tangente à $\mathcal{C}_f$ en $B(2;1)$

3) graphique 0,25 ×3 + 0,5

Partie C : f est le coût moyen unitaire en € pour x milliers de jouets produits en un jour

/1

$\sqrt{2}\simeq 1,414$

D'après la partie B, l'entreprise doit produire environ 1414 jouets pour avoir un coût moyen de production minimum.

puisque chaque jouet est vendu 2 €, le bénéfice total est de $1414\times(2-0,83)$ soit environ 1654 €/jour.

Exercice 4

Remarque : Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment de la partie A. (8 pts)

Partie A (2,5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ et on note C_f sa courbe représentative.
C_f passe par le point A de coordonnées $(1; 1)$.
C_f admet la droite (d) d'équation $y = -x + 2$ pour tangente au point A.

1. En utilisant les données du texte et en justifiant la réponse, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
2. f est de la forme $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x}$; exprimer $f'(x)$ en fonction des coefficients a et b.
3. En déduire la valeur des coefficients a et b.

Partie B (4,5 points)

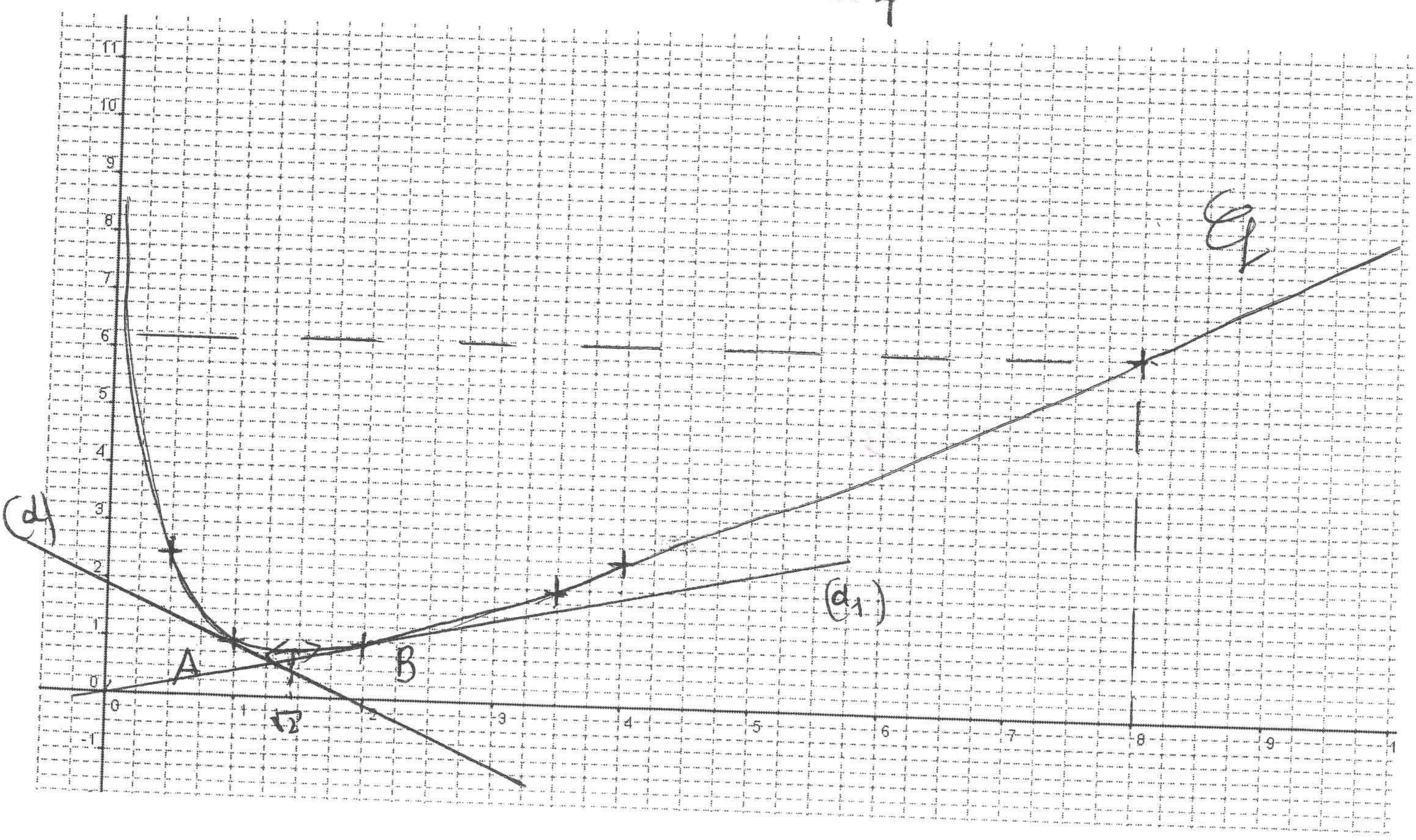
On suppose pour la suite que $a = -2$ et $b = 2$ et on a alors $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

1. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Donner la valeur exacte du minimum puis sa valeur arrondie aux centièmes.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_1) à la courbe au point d'abscisse 2.
3. Dans le repère donné en annexe, tracer C_f, (d) et (d_1).

Partie C (1 point)

Une entreprise fabrique des jouets en plastique.
La fonction f représente le coût moyen **unitaire** de production en euros en fonction du **nombre x de milliers** de jouets produits par jour, c'est-à-dire le **coût de production d'un millier** de jouets quand l'entreprise en produit x milliers chaque jour.
On suppose que toute la production est vendue, et que chaque jouet est vendu 2 euros.
Déterminer le nombre de jouets arrondi à l'unité, que l'entreprise doit produire chaque jour, pour que le coût moyen de production soit minimum.
Quel est alors le bénéfice journalier arrondi à l'euro de l'entreprise ?

ANNEXE de l'exercice 4



Ex 1 : $\dfrac{-11\pi}{3} = \dfrac{-12\pi+\pi}{3} = -4\pi + \dfrac{\pi}{3}$ mesure principale $\dfrac{\pi}{3}$

0,5 + 0,25 × 4

$\dfrac{33\pi}{4} = \dfrac{32\pi+\pi}{4} = 8\pi + \pi/4 \rightarrow \pi/4$

$-\dfrac{17\pi}{6} = \dfrac{-12\pi - 5\pi}{6} = -2\pi - \dfrac{5\pi}{6} \rightarrow \dfrac{-5\pi}{6}$

$\dfrac{-75\pi}{8} = -\dfrac{80\pi+5\pi}{8} = -10\pi + \dfrac{5\pi}{8} \rightarrow \dfrac{5\pi}{8}$

Ex 2 : A $= \cos(x-\pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$
$= -\cos x - \sin x - \cos x - (-\sin x) = \boxed{-2\cos x}$

B $= \sin x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos x - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
$= \sin x - \sin x + \cos x - \cos x = 0$

0,75 × 4

C $= \sin\dfrac{3\pi}{8} + \sin\dfrac{5\pi}{8} + \sin\dfrac{11\pi}{8} + \sin\dfrac{13\pi}{8}$
$= \sin\dfrac{3\pi}{8} + \sin\dfrac{5\pi}{8} + \sin\left(\dfrac{3\pi}{8}+\pi\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{8}+\pi\right)$
$= \sin\dfrac{3\pi}{8} + \sin\dfrac{5\pi}{8} - \sin\dfrac{3\pi}{8} - \sin\dfrac{5\pi}{8} = 0$

D $= \cos\dfrac{\pi}{10} + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5} + \cos\dfrac{9\pi}{10}$
$= \cos\dfrac{\pi}{10} + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\left(\pi - \dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{10}\right)$
$= \cos\dfrac{\pi}{10} + \cos\dfrac{2\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5} - \cos\dfrac{\pi}{10} = 0$

Ex 3 : 1) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $[0;3\pi[$: $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3} ; \dfrac{7\pi}{3}\right\}$

0,5

0,5 2) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi;\pi]$: $S = \left\{-\dfrac{3\pi}{4} ; -\dfrac{\pi}{4}\right\}$

3) $\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \end{cases}$ $k, k' \in \mathbb{Z}$

0,75 Sur $[0;4\pi[$: $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{4\pi}{3} ; \dfrac{8\pi}{3} ; \dfrac{10\pi}{3}\right\}$

0,75 4) $\cos^2 x = \frac{3}{4} \iff \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

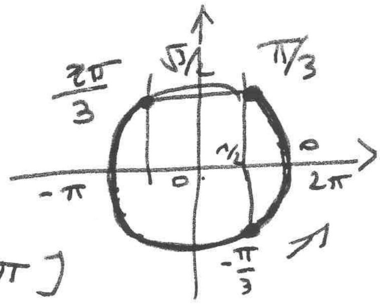
sur $[0 ; 2\pi[$: $\underline{S = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right\}}$

0,75 5) $6 - 12\cos x > 0 \iff -12\cos x > -6 \iff \cos x < \frac{1}{2}$

sur $]-\pi ; \pi]$: $\underline{S = \left]-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3} ; \pi\right]}$

0,75 6) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi ; 2\pi]$

$\underline{S = \left]-\pi ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; 2\pi\right]}$



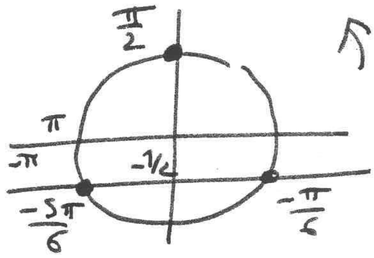
7) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ $\quad x \in]-\pi ; \pi]$

$\iff \begin{cases} 2X^2 - X - 1 = 0 \\ X = \sin x \in [-1 ; 1] \end{cases}$

1 $\iff \begin{cases} 2(X-1)(X+1/2) = 0 \\ X = \sin x \end{cases}$

$\iff \sin x = 1$ ou $\sin x = -1/2$

$\underline{S = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right\}}$



1 8) $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k'\pi \end{cases}$ $\quad k, k' \in \mathbb{Z}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k'\pi \end{cases}$

Sur $]-\pi ; \pi]$

$\underline{S = \left\{-\frac{7\pi}{8} ; -\frac{5\pi}{8} ; \frac{\pi}{8} ; \frac{3\pi}{8}\right\}}$