Correction du devoir n° 7 - 1S

Ex1 : $f(x) = 2 - \dfrac{2(1-x)}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$

1) $x^2+1 \neq 0$ donc f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -2 \times \frac{-1(x^2+1)-(1-x)\times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\left(\frac{-x^2-1-2x+2x^2}{(x^2+1)^2}\right)$$

a) $\boxed{f'(x) = -2\left(\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}\right)}$

$\left.\begin{array}{l} -2<0 \\ x^2+1>0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x)$ du signe contraire de $P(x) = x^2-2x-1$

b) $\Delta_P = 4-4\times(-1) = 8$ $\quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = 1-\sqrt{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$\mathbb{R}$
-2		$-$		$-$		$-$	
$a=1$ x^2-2x-1		$+$ signe de a	0	$-$ de $-a$	0	$+$ signe de a	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\infty$

$\boxed{\begin{array}{l} f(1-\sqrt{2}) \simeq -0{,}41 \\ f(1+\sqrt{2}) \simeq 2{,}41 \end{array}}$

2) $T : y = f'(1)\times(x-1) + f(1)$ $\quad \begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$

$y = 1\times(x-1)+2$

$\boxed{y = x+1}$ tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(1;2)$

3) il s'agit de résoudre $f'(x) = -1$ coefficients directeurs égaux

tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x $\quad \Delta : y = -x$

a) $-2\dfrac{(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2} = -1 \iff 2(x^2-2x-1) = (x^2+1)^2$

$\iff 2x^2-4x-2 = x^4+2x^2+1$

$\iff \boxed{0 = x^4+4x+3}$

b) $(x+1)^2(x^2-2x+3) = (x^2+2x+1)(x^2-2x+3)$

$= x^4-2x^3+3x^2+2x^3-4x^2+6x+x^2-2x+3$

$= x^4+4x+3$

c) $f'(x) = -1 \iff x^4+4x+3 = 0 \iff (x+1)^2(x^2-2x+3) = 0$

$\iff (x+1)^2 = 0$ ou $x^2-2x+3 = 0$ $\quad \Delta = 4-12$, $\Delta<0$

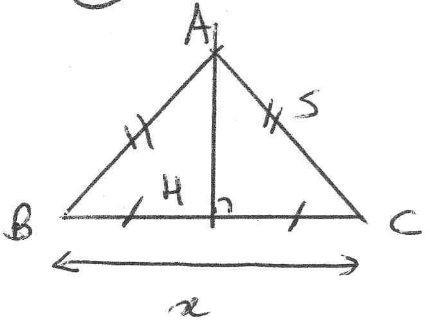
$\iff x = -1$ $\quad$ ↳ donc pas de solution

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à $\Delta : y = -x$ au point B d'abscisse -1

Ex2 : 1) a) x est l'écartement entre les 2 rectangles qui ont 5 cm de largeur chacun

donc $\boxed{0 \le x \le 10}$ $(2\times 5=10)$ → $BC \le AB+AC$

b)



ABC triangle isocèle en A

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AH\times BC}{2}$ $BC = x$ (cm)

Dans AHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore

$AC^2 = AH^2+HC^2 \iff 25 = AH^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\iff AH^2 = 25 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{100-x^2}{4}$

$\iff AH = \frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ $0\le x\le 10$ alors $100-x^2 \ge 0$

donc $\mathcal{A}(ABC) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}\times x}{2}$

$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{4}x\sqrt{100-x^2}}$ (cm²)

c) $V(x) = \mathcal{A}(ABC)\times h = \frac{1}{4}x\sqrt{100-x^2}\times 20 = \boxed{5x\sqrt{100-x^2}}$ (cm³)

2) $f(x) = x^2(100-x^2)$ définie sur $[0;10]$

a) f dérivable sur $[0;10]$: fonction polynôme

$f(x) = 100x^2 - x^4$ et $f'(x) = 200x - 4x^3 = \boxed{4x(50-x^2)}$

$4x\ge 0$ sur $[0;10]$ donc $f'(x)$ du signe de $50-x^2$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$a=-1$ $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	2500	↘	0

b) f admet un maximum pour $x=5\sqrt{2}$

3) a) $V(x)^2 = 25x^2(100-x^2) = 25f(x)$ $f(x)\ge 0$

donc $\boxed{V(x) = 5\sqrt{f(x)}}$ pour $x\in[0;10]$

b) $x\mapsto\sqrt{x}$ strictement croissante ; $5>0$ } par composée V a les mêmes variations que f

donc V croissante sur $[0;5\sqrt{2}]$ puis décroissante sur $[5\sqrt{2};10]$

c) V admet son maximum pour $\boxed{x = 5\sqrt{2} \approx 7 \text{ cm}}$

et il sera de $5\sqrt{2500}$ soit 250 cm³