Correction du devoir n°5 - 1.S

Ex 1 : 1) $u(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $I = [-7 ; -1]$ car $0 \notin I$

5,5

x	-7		-1
$u(x)$	$-\frac{1}{7}$	$\searrow$	-1

$v(x) = -\frac{8}{x}$ définie sur I

$\boxed{v(x) = -8 \times u(x)}$ $\quad -8 < 0$

donc v a les variations contraires de u

x	-7		-1
$v(x)$	$8/7$	$\nearrow$	8

1,5

2) $u(x) = -2x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$ donc sur $I =]-\infty ; 0]$

fonction affine

$-2 < 0$ donc u est décroissante sur I

- $v(x) = \sqrt{-2x+5}$ $\quad x \leq 0 \Rightarrow -2x \geq 0 \Rightarrow -2x + 5 > 0$ $\quad$ 2

donc v est bien définie sur I

$\boxed{v(x) = \sqrt{u(x)}}$ $\quad x \mapsto \sqrt{\ }$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$

par composée v est décroissante sur I

3) $u(x) = x^2 - 2$ définie sur $\mathbb{R}$ donc

et

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{v(x)} = x^2 - 2 = \boxed{u(x) - 2}$ mêmes variations

$\mathcal{C}_u \xrightarrow[t_{-\vec{j}}]{} \mathcal{C}_v$

1,5

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$v(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ex 2 : $f(x) = |2x - 1| + |x + 3|$

1) $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 0 & \text{et } |2x - 1| = -2x + 1 \\ x \geq 1/2 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 & \text{et } |2x - 1| = 2x + 1 \end{cases}$ $\quad$ 5

$\begin{cases} x \leq -3 \Leftrightarrow x + 3 \leq 0 & \text{et } |x + 3| = -x - 3 \\ x \geq -3 \Leftrightarrow x + 3 \geq 0 & \text{et } |x + 3| = x + 3 \end{cases}$

$x \leq -3$ $\quad f(x) = -2x + 1 - x - 3 = \boxed{-3x - 2}$

$-3 \leq x \leq 1/2$ $\quad f(x) = -2x + 1 + x + 3 = \boxed{-x + 4}$ $\quad$ 3

$x \geq \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = 2x - 1 + x + 3 = \boxed{3x + 2}$

2) $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$

- $x \leq -3$ $\quad f(x) = 4 \iff -3x - 2 = 4 \iff -3x = 6 \iff x = -2$

  $-2 > -3$ Pas de solution

- $-3 \leq x \leq 1/2$ $\quad f(x) = 4 \iff -x + 4 = 4 \iff x = 0$

  $-3 < 0 < 1/2$

- $x \geq \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = 4 \iff 3x + 2 = 4 \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$

  $\frac{2}{3} > 1/2$ $\quad \boxed{S = \{0 ; \frac{2}{3}\}}$

2

Ex3 : 1) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$ $\quad a = 2$

$\begin{cases} f(2) = -4 + 6 - 1 = 1 \\ f(2+h) = -(2+h)^2 + 3(2+h) - 1 \\ \quad = -(4 + 4h + h^2) + 6 + 3h - 1 \\ \quad = -h^2 - h + 1 \end{cases}$

$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ $\quad h \neq 0$

$= \frac{-h^2 - h}{h} = -\frac{h(h+1)}{h}$

$= -(h+1)$

6

$\lim_{h \to 0} -(h+1) = -1$ Donc f est dérivable en $a = 2$

et $\boxed{f'(2) = -1}$

2) $f(x) = \sqrt{x-3}$ définie sur $[3 ; +\infty[$ et $a = 4$

$\begin{cases} f(4) = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1 \\ f(4+h) = \sqrt{4+h-3} = \sqrt{1+h} \end{cases}$

$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$ $\quad h \neq 0$

$= \frac{(\sqrt{1+h} - 1)}{h} \times \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1}$

$= \frac{(1+h) - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1}$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}$

donc f est dérivable en 4

et $\boxed{f'(4) = \frac{1}{2}}$

3) $f(x) = \frac{2}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en $a = 0$

$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{2}{1-h} - 2}{h} = \left(\frac{2 - 2(1-h)}{1-h} \right) \times \frac{1}{h} = \frac{2h}{1-h} \times \frac{1}{h}$

$h \neq 0$

$= \frac{2}{1-h}$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{2}{1-h} = 2$

Donc f est dérivable en $a = 0$ et $\boxed{f'(0) = 2}$