Correction du devoir n°3 – 1-S

Ex1 : 1) $(d) : 2x - 3y + 6 = 0$
$\Leftrightarrow \underline{y = \frac{2}{3}x + 2}$

2) $\vec{u}(3;2)$ vecteur directeur de (d)

$A(1;7)$ et $\vec{v}(2;-3)$

3) $\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$
$\vec{w}\begin{pmatrix} 6-1 \\ 4+3/2 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ 11/2 \end{pmatrix}}$

4) $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ 11/2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$5 \times (-3) - 2 \times \frac{11}{2} = -15 - 11 = -26$ $\quad -26 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

5) (d') de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
donc $(d') : -3x - 2y + c = 0$
$A(1;7) \in (d') \Leftrightarrow -3 - 14 + c = 0 \Leftrightarrow c = 17$
Alors $(d') : -3x - 2y + 17 = 0$
ou $\boxed{3x + 2y - 17 = 0} \rightarrow \underline{y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}}$

6) il s'agit de résoudre

$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 & L_1 \\ 3x + 2y - 17 = 0 & L_2 \end{cases}$

((d) et (d') non parallèles car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires donc le système admet une solution unique.)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y + 18 = 0 & 3L_1 \\ 6x + 4y - 34 = 0 & 2L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -13y + 52 = 0 & 3L_1 - 2L_2 \\ 3x + 2y - 17 = 0 & L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = +3 \end{cases}$ $\quad$ $\underline{(d) \text{ et } (d') \text{ se coupent en } I(3;4)}$

7) $(d'') // (d)$ donc $\vec{u}(3;2)$ est vecteur directeur de (d'')

$(d'') : 2x - 3y + c = 0$

$A(1;7) \in (d'') \Leftrightarrow 2 - 21 + c = 0 \Leftrightarrow c = 19$

Alors $\boxed{(d'') : 2x - 3y + 19 = 0}$

Ex 2 : 1ère méthode : Considérons le repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AH})$ puisque ABGH carré

- $\boxed{A(0;0)}$ $\boxed{B(1;0)}$ $\boxed{H(1;0)}$ et $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AH}$ $\boxed{G(1;1)}$
- BCFG et CDEF sont des carrés

donc $\vec{AC} = 2\vec{AB} \rightsquigarrow \boxed{C(2;0)}$

- $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AD} + \vec{AH} = 3\vec{AB} + \vec{AH}$ $\boxed{E(3;1)}$
- Dans le triangle ADE
  - B ∈ [AD]
  - J ∈ [AE]
  - (BJ) // (ED) car dans un carré les côtés opposés sont parallèles

D'après la propriété de Thalès : $\frac{AB}{AD} = \frac{AJ}{AE} = \frac{BJ}{DE} = \frac{1}{3}$

donc $AJ = \frac{1}{3} AE$ alors $\boxed{J(1 ; 1/3)}$

avec le sens

$\vec{AJ} = 1/3 \, \vec{AE}$

- I milieu de [AG] donc $\boxed{I(1/2 ; 1/2)}$
- $\vec{CJ}\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ $\vec{CI}\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\vec{CI} = \frac{3}{2}\vec{CJ}$

$\vec{CI}$ et $\vec{CJ}$ sont colinéaires

donc les points C, I et J sont alignés

2ème méthode

ABGH, BCFG et CDEF sont des carrés

on a donc $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \end{cases}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

- I milieu de [AG] donc $\overrightarrow{AI} = 1/2\,\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH})$

  donc $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}}$

- J est l'intersection de (BG) et (AE)

Dans le triangle ADE

- J sur [AE]
- B sur [AD]
- (BJ) // (DE) car $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE}$

D'après la propriété de Thalès

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AJ}{AE} = \frac{1}{3}$$

donc $AJ = 1/3\,AE$

avec le sens $\rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}}$

- $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}$

  $= -2\overrightarrow{AB} + 1/2\,\overrightarrow{AB} + 1/2\,\overrightarrow{AH}$

  $= \underline{-3/2\,\overrightarrow{AB} + 1/2\,\overrightarrow{AH}}$

  $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ}$

  $= -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + 1/3(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$

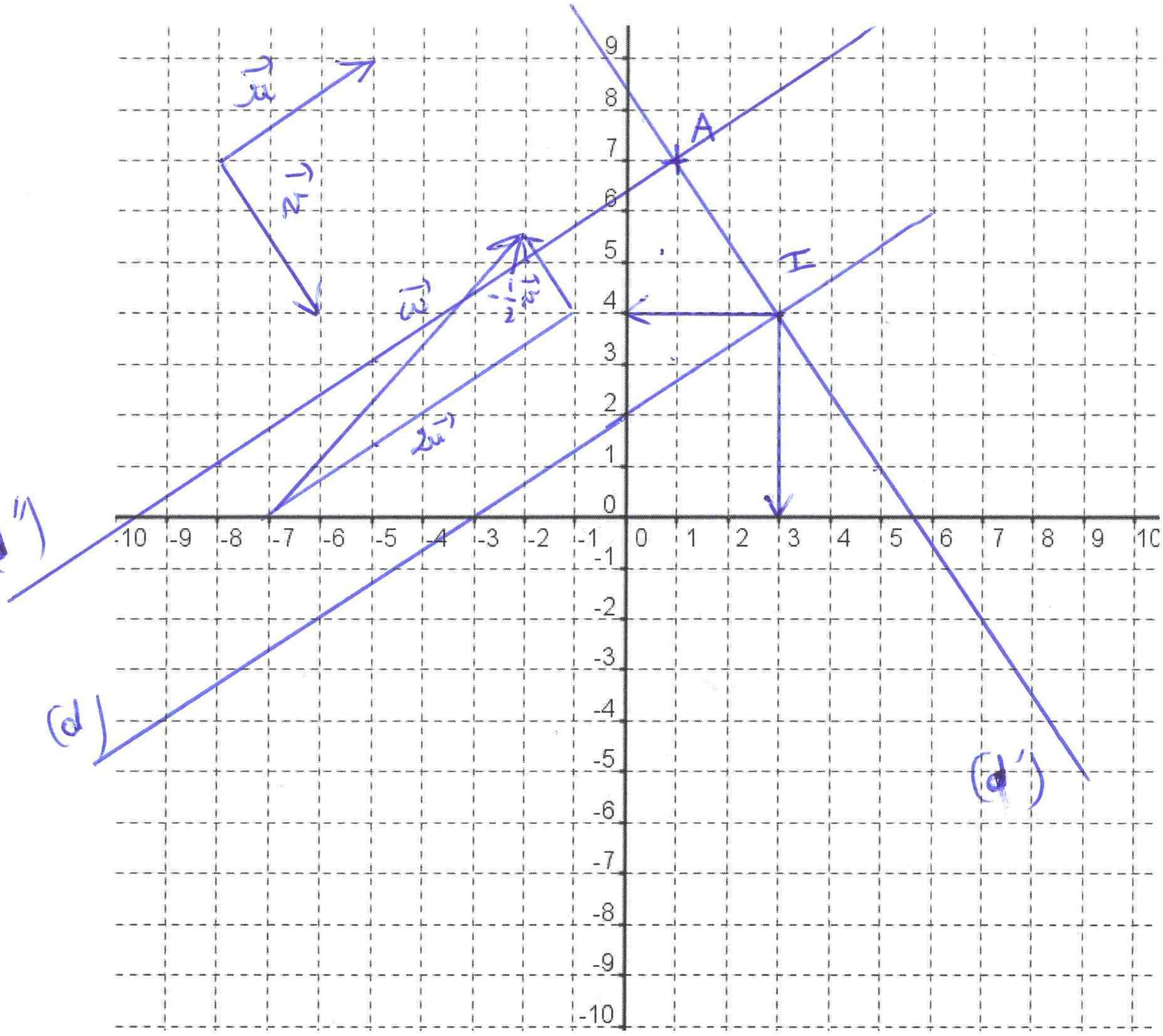
  $= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 1/3\,\overrightarrow{AH}$

  $= \underline{-\overrightarrow{AB} + 1/3\,\overrightarrow{AH}}$

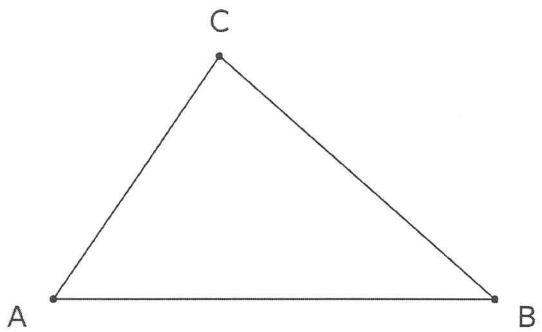
$\overrightarrow{CI} = 3/2\,\overrightarrow{CJ}$ $\quad$ $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires

donc, C, I et J alignés

Annexe exercice 1



Annexe exercice 4



Ex3 : $\mathcal{D}_m : mx + (2m-1)y + 4 = 0$ $(m \in \mathbb{R}$

1) Il s'agit de vérifier si (m) et $2m-1$ peuvent être nuls en même temps

- si $m = 0$, $2m - 1 = -1$ et $-1 \neq 0$
- si $2m - 1 = 0$, $m = 1/2$ et $m \neq 0$

Donc $\mathcal{D}_m$ est bien une droite

2) $\begin{cases} \mathcal{D}_m \,//\, (\text{axe des abscisses}) \iff m = 0 \rightsquigarrow \mathcal{D}_0 : y = 4 \\ \mathcal{D}_m \,//\, (\text{axe des ordonnées}) \iff 2m - 1 = 0 \quad m = 1/2 \end{cases}$

$\rightsquigarrow \mathcal{D}_{1/2} : x =$

3) $\begin{cases} \mathcal{D}_0 : y = 4 \\ \mathcal{D}_1 : x + y + 4 = 0 \end{cases}$ $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en $(-8;4)$

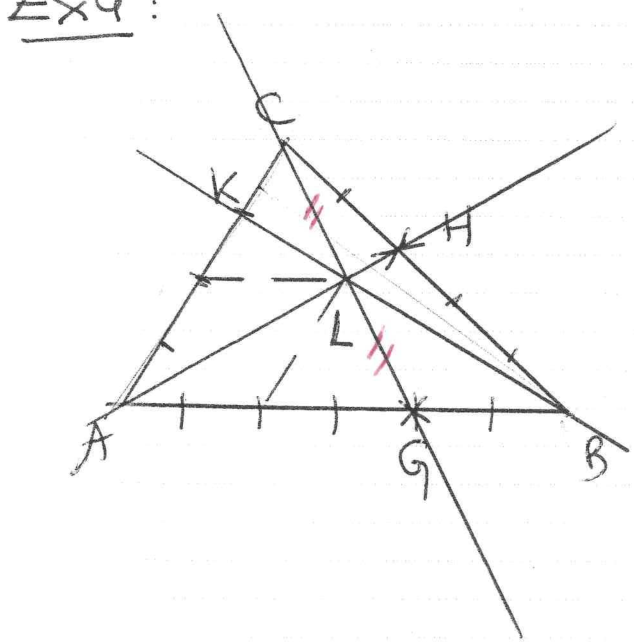
4) Soit $A(-8;4)$: $A \in \mathcal{D}_0$, $A \in \mathcal{D}_{1/2}$, $A \in \mathcal{D}_1$

Remplaçons ses coordonnées dans l'équation de $\mathcal{D}_m$:

$-8m + 4(2m-1) + 4 = -8m + 8m - 4 + 4 = 0$

L'équation est vérifiée donc $A(-8;4) \in \mathcal{D}_m$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

Ex4 :



1) $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

$\iff \vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AG} + \vec{GB})$

$\iff \vec{0} = -\frac{1}{3}\vec{AG} + \frac{2}{3}\vec{GB}$

$\iff \vec{0} = -\vec{AG} + 2\vec{GB}$

$\iff \boxed{\vec{0} = \vec{GA} + 2\vec{GB}}$

2) $2\vec{HB} + 3\vec{HC} = \vec{0}$

$\iff 5\vec{HB} + 3\vec{BC} = \vec{0}$

$\iff 5\vec{HB} = -3\vec{BC}$

$\iff 5\vec{BH} = 3\vec{BC}$

$\iff \boxed{\vec{BH} = \frac{3}{5}\vec{BC}}$

3) $\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0} \iff 4\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0} \iff \boxed{\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}}$

4) a) $\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

$\iff 6\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\iff \overrightarrow{AL}=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AC} \iff \boxed{\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

b) $\begin{cases} \overrightarrow{CL}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AL}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \quad =\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} \end{cases}$

$\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CL} \iff$ $\boxed{L \text{ milieu de } [CG]}$

5) $\begin{cases} \overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} \\ \quad =\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} \end{cases}$

$\overrightarrow{AH}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AL}$ $\quad \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AL}$ colinéaires

$\iff$ A, L et H alignés

6) $\begin{cases} \overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AL}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{cases}$

$\overrightarrow{BL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$ $\quad \overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$ colinéaires

$\iff L \in (BK)$

7) L milieu [GC], $L \in (AH)$ et $L \in (BK)$

Les droites (GC), (AH) et (BK) sont concourantes en G.