Correction du devoir n°2 – 1-S

Ex 1) 1) $\dfrac{2x^2-10x-5}{x+2} = x-3$ sur $I = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ 0,25

$\iff 2x^2-10x-5 = (x-3)(x+2)$ $\qquad \Delta = 81-4 = 77$

$\iff 2x^2-10x-5 = x^2-x-6$ $\qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{77}$ 1,25

$\iff \underline{x^2-9x+1=0}$ $\qquad$ 2 racines $\begin{cases} x_1 = \dfrac{9+\sqrt{77}}{2} \\ x_2 = \dfrac{9-\sqrt{77}}{2} \end{cases}$

1,25

$x_1, x_2 \in I$ donc

$$\underline{S = \left\{\frac{9-\sqrt{77}}{2} ; \frac{9+\sqrt{77}}{2}\right\}}$$

2) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ sur $\mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} X = x^2 \text{ avec } X \in [0;+\infty[\\ X^2 - 6X + 8 = 0 \end{cases}$ $\qquad \Delta = 36-32 = 4$

$\sqrt{\Delta} = 2$

$\iff \begin{cases} X = 4 \text{ ou } X = 2 \\ X = x^2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ X_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$ 1,25

$\iff x^2 = 4$ ou $x^2 = 2$

$\iff x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$$\underline{S = \{-2 ; -\sqrt{2} ; \sqrt{2} ; 2\}}$$

3) $\sqrt{3-x} = 3x+5$

- $3-x \geqslant 0 \iff 3 \geqslant x$ $\qquad$ • $3x+5 \geqslant 0 \iff x \geqslant -5/3$ 0,5

on travaille sur $I = \left[-\frac{5}{3} ; 3\right]$

- $\sqrt{3-x} = 3x+5$ $\qquad \Delta = 31^2 - 9\times 22 = 169$

$\iff (3-x) = (3x+5)^2$ 1 $\qquad \sqrt{\Delta} = 13$

$\iff 3-x = 9x^2+30x+25$ $\qquad$ 2 racines

$\iff \underline{9x^2+31x+22=0}$ $\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-31-13}{18} = \dfrac{-44}{18} = -\dfrac{22}{9} \\ x_2 = \dfrac{-31+13}{18} = \dfrac{-18}{18} = -1 \end{cases}$

$x_1 \notin I$ donc

$$\underline{S = \{-1\}}$$

1,5

4) $\sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{x+3}$

• $x^2+5x+6 \geq 0$

$\Delta = 1 \quad \sqrt{\Delta} = 1$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+1}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-5-1}{2} = -3 \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
x^2+5x+6 $a=1$		$+$ signe de a	0	$-$ de $-a$	0	$+$ de a	

1

$x^2+5x+6 \geq 0$ sur $]-\infty;-3] \cup [-2;+\infty[$

• $x+3 \geq 0 \iff x \geq -3$

On travaille sur $I = \{-3\} \cup [-2;+\infty[$

2

$x^2+5x+6 = x+3$

$\iff x^2+4x+3 = 0$

1

$\Delta = 16-12 = 4$

$\sqrt{\Delta} = 2$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4-2}{2} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-4+2}{2} = -1 \end{cases}$

$-3 \in I$

$-1 \notin I$

donc $S = \{-3\}$

5) $-2x^2+5x-3 > 0$ sur $\mathbb{R}$

$\Delta = 25 - 4\times2\times3 = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1 \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5-1}{-4} = 3/2 \\ x_2 = \dfrac{-5+1}{-4} = 1 \end{cases}$

1

x	$-\infty$		1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+5x-3$ $a=-2$		$-$ signe de a	0	$+$ de $-a$	0	$-$ de a	

$S =]1;3/2[$

6) $\dfrac{2x^2-5x+1}{3-x} \leq 2$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ 0,25

$\iff \dfrac{2x^2-5x+1}{3-x} - \dfrac{2(3-x)}{3-x} \leq 0$

$\iff \dfrac{2x^2-5x+1-6+2x}{3-x} \leq 0$

$\iff \dfrac{2x^2-3x-5}{3-x} \leq 0$

Soit $N(x) = 2x^2-3x-5$

2

$\Delta = 9 - 4\times2\times(-5) = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7 \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+7}{4} = 5/2 \\ x_2 = \dfrac{3-7}{4} = -1 \end{cases}$

x		-1		$5/2$		3		$+\infty$
$N(x)$ $a=2$	$+$ signe de a	0	$-$ de $-a$	0	$+$		$+$ signe de a	
$3-x$	$+$		$+$		$+$		$-$	
$\dfrac{N(x)}{3-x}$	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$S = [-1;5/2[\cup]3;+\infty[$

Ex2 $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ 4

1) $P(2) = 2^3 - 4\times 2^2 + 3\times 2 + 2$ 0,5

$= 8 - 4\times 4 + 6 + 2$

$= 8 - 16 + 8 = 0$ donc 2 est solution de $P(x) = 0$

2) $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -4 \\ c - 2b = 3 \\ -2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ -1 - 2\times(-2) = 3 \text{ vérifié} \\ c = -1 \end{cases}$ 1,75

donc $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 1)$

3) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x^2 - 2x - 1 = 0$ $\Delta = 8$ $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

$S = \{1 - \sqrt{2} ; 2 ; 1 + \sqrt{2}\}$ 1,75

Ex3 1) $g(x) = -3x^2 + 6x + 12$ sur $\mathbb{R}$

$-b/2a = \frac{-6}{-6} = 1$ $g(1) = -3 + 6 + 12 = 15$ 0,5

Le sommet de C_g est $S(1;15)$

2) $a = -3$ donc 0,5

$a < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	15	$\searrow$	$-\infty$

cause 0,5

3) $3x^2 - 4x - 4 > -3x^2 + 6x + 12$ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 10x - 16 > 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 8 > 0$

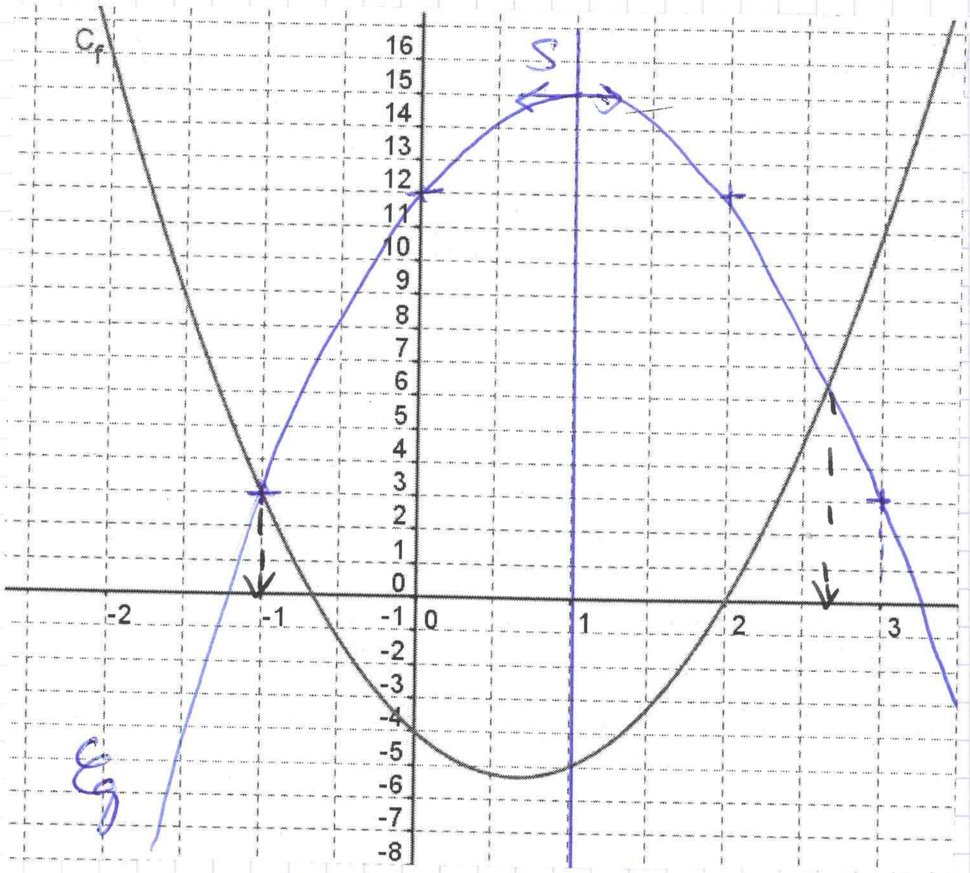
$\Delta = 25 - 4\times 3\times(-8) = 121$ $\sqrt{\Delta} = 11$

$x_1 = \frac{5 + 11}{6} = 8/3$ et $x_2 = \frac{5 - 11}{6} = -1$

x	$-\infty$		-1		$8/3$		$+\infty$
$3x^2 - 5x - 8$ ($a = 3$)		+ signe de a	0	− de −a	0	+ de a	

1,5

$S =]-\infty ; -1[\cup]8/3 ; +\infty[$

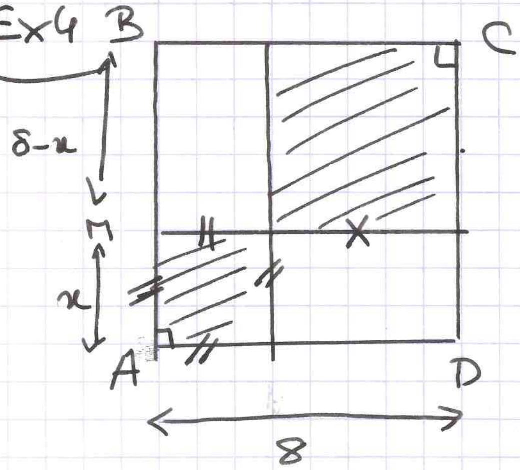


Graphiquement, il s'agit de résoudre $f(x) > g(x)$. Les solutions sont les abscisses des points tels que $\mathcal{C}_f$ soit strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$

$S =]-\infty ; -1[\cup]2{,}7 ; +\infty[$

1,

Ex4



$AB = 8$ cm

On pose $AM = x$ $\quad (0 \leq x \leq 8)$

donc $MB = 8 - x$

- L'aire du carré ABCD est $64\ cm^2$
- Ag est la somme des aires de 2 carrés : $Ag = x^2 + (8-x)^2$
$= 2x^2 - 16x + 64$ (cm²)

Il s'agit de résoudre $2x^2 - 16x + 64 = 32$

soit $x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$

3

$\Leftrightarrow x = 4$. Une seule solution donc une seule position pour M. VRAI

M doit être le milieu de [AB] pour que Ag soit la moitié de l'aire du carré ABCD

ou soit $f(x) = 2x^2 - 16x + 64$

$a = 2$
$a > 0$

$-\frac{b}{2a} = \frac{16}{4} = 4$

x	0	4	8
$f(x)$	64 ↘	32	↗ 64

le minimum pour f est 32 atteint pour $x = 4$ seulement.