Correction du devoir n° 12 - 1-S

ROC : Soit $q \neq 0$ et $q \neq 1$

$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \quad n \in \mathbb{N}$ 2

$\ominus \; S_n \times q = \quad q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$

$S_n - S_n \times q = 1 - q^{n+1}$ donc $(1-q) S_n = 1 - q^{n+1}$

alors $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$.

Ex1 1) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3 \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

/4

On a $u_{n+1} - u_n = (2u_n^2 + u_n + 3) - u_n = 2u_n^2 + 3$ 1

or $2u_n^2 + 3 > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} > u_n$

et (u_n) est strictement croissante

2) (u_n) suite géométrique ~~de~~ raison $q > 0$

avec $\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_5 = 3072 \end{cases}$ alors $u_5 = u_1 \times q^4$

$\Leftrightarrow 3072 = 12 \times q^4$

$\Leftrightarrow q^4 = 256$

$\Leftrightarrow \boxed{q = 4}$ ou $\cancel{q = -4}$

$u_7 = u_5 \times q^2$
$= 3072 \times 16$
$= \boxed{49152}$

1

3) $S = 2 + 5 + 8 + \dots + 299 + 302$ avec (u_n) suite arithmétique de raison 3 de terme initial $u_0 = 2$

$= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$

$u_n = 302$

$\Leftrightarrow u_0 + nr = 302$

$\Leftrightarrow 2 + 3n = 302$

$\Leftrightarrow n = 100$

1

Alors $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{300}$

$= \dfrac{(u_0 + u_{100}) \times 101}{2}$

$= \dfrac{(2 + 302) \times 101}{2} = 15352$

4) $V = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 32768$ avec (v_n) suite géométrique de raison 2 de terme initial $v_0 = 1$

$= v_0 + v_1 + \dots + v_n$ 1

$v_n = 32768$

$\Leftrightarrow v_0 \times q^n = 32768$

$\Leftrightarrow 2^n = 32768 \Leftrightarrow n = 15$

Alors $V = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$

$= v_0 \times \dfrac{1 - q^{16}}{1-q} = \dfrac{1 - 2^{16}}{1-2}$

$= (2^{16} - 1) = \boxed{65535}$

Ex2 : 1) $\begin{cases} C_0 = 5000 \ (€) \text{ capital au 1er/01/12} \\ C_1 = 5000 + 5000 \times \frac{4}{100} + 200 = \underline{5400} \\ C_2 = 5400 + 5400 \times \frac{4}{100} + 200 = \underline{5816} \end{cases}$ C_n capital au 1er/01 de $(2012+n)$

0,5

2) $\boxed{C_{n+1} = 1{,}04\, C_n + 200}$ → 200 € supplémentaires par an

$(n \in \mathbb{N})$ augmenter de 4% revient à multiplier par $1 + \frac{4}{100}$ soit 1,04 0,5

3) $\begin{cases} C_1 - C_0 = 400 \\ C_2 - C_1 = 416 \end{cases}$ 0,5 $\begin{cases} \frac{C_1}{C_0} = \frac{5400}{5000} = \frac{27}{25} \\ \frac{C_2}{C_1} = \frac{5816}{5400} = \frac{727}{675} \end{cases}$ 0,5

$C_1 - C_0 \neq C_2 - C_1$
$\frac{C_1}{C_0} \neq \frac{C_2}{C_1}$ donc (C_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

4) Soit $\boxed{V_n = C_n + 5000}$ $n \in \mathbb{N}$

0,25 a) $V_0 = C_0 + 5000 = \underline{10000}$

$V_{n+1} = C_{n+1} + 5000 = (1{,}04\, C_n + 200) + 5000$
$= 1{,}04\, C_n + 5200 = 1{,}04\,(C_n + 5000)$
~~0,75~~ $= 1{,}04\, V_n$

donc (V_n) est une suite géométrique de
0,25 raison 1,04 de terme initial $V_0 = 10000$

0,5 b) alors $V_n = V_0 \times q^n = \boxed{10000 \times (1{,}04)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

0,5 et $C_n = V_n - 5000 = \boxed{10000 \times (1{,}04)^n - 5000}$

5) $2020 = 2012 + 8$ on calcule $C_8 \simeq 8685{,}7$

Soit un capital disponible de $\underline{8686 \text{ €}}$ environ

0,5 à la fin 2020 ⚠ sans les intérêts de fin d'année

6) on cherche $C_n \geq 10000 \iff 10000 \times (1{,}04)^n - 5000 \geq 10000$

$\iff (1{,}04^n) \geq \frac{15000}{10000} \iff (1{,}04)^n \geq 1{,}5$

0,5 $(1{,}04)^{10} < 1{,}5$ et $(1{,}04)^{11} > 1{,}5$ $2012 + 11 = 2023$

Donc le capital dépassera 10000€ en 2023

Ex3 : $u_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5)$ et $v_n = \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$
$(n \in \mathbb{N})$

1) $u_0 = \frac{1}{4}(1-5) = -1$ $\quad u_1 = \frac{1}{4}(2+4-5) = \frac{1}{4}$

1 $\quad v_0 = \frac{1}{4}(1+5) = \frac{3}{2}$ $\quad v_1 = \frac{1}{4}(2-4+5) = \frac{3}{4}$

2) 0,5
$a_n = u_n + v_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5) + \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$
$= \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5 + 2^n - 4n + 5) = \frac{1}{4} \times 2^n \times 2 = \frac{1}{2} \times 2^n$

$a_{n+1} = \frac{1}{2} \times 2^{n+1} = \left(\frac{1}{2} \times 2^n\right) \times 2 = a_n \times 2$

(a_n) est une suite géométrique de raison 2

0,5 de premier terme $a_0 = \frac{1}{2}$

0,75 Donc $S_a(n) = a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_0 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \boxed{\frac{1}{2}(2^{n+1} - 1)}$

3) $b_n = u_n - v_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5) - \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$

0,5
$= \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5 - 2^n + 4n - 5) = \frac{1}{4}(8n - 10) = \frac{1}{2}(4n - 5)$
$= 2n - \frac{5}{2}$

$b_{n+1} = 2(n+1) - 5/2 = 2n + 2 - 5/2 = 2n - \frac{1}{2}$

alors $b_{n+1} - b_n = (2n - 1/2) - (2n - 5/2) = -1/2 + 5/2 = 2$

0,5 (b_n) est une suite arithmétique de raison 2

de terme initial $b_0 = -5/2$

0,75 Donc $S_b(n) = b_0 + b_1 + \dots + b_n = \frac{(b_0 + b_n) \times (n+1)}{2}$

$= \frac{(-5/2 + 2n - 5/2) \times (n+1)}{2} = \boxed{\frac{(2n-5)(n+1)}{2}}$

4) $\begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = u_n - v_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ v_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{cases}$

Alors
$$\begin{cases} S_u(n) = \frac{1}{2}\left(S_a(n) + S_b(n)\right) = \frac{1}{4}\left(2^{n+1} - 1\right) + \frac{(2n-5)(n+1)}{4} \\ S_v(n) = \frac{1}{2}\left(S_a(n) - S_b(n)\right) = \frac{1}{4}\left(2^{n+1} - 1\right) - \frac{(2n-5)(n+1)}{4} \end{cases}$$

1

$(n \in \mathbb{N})$

Ex 4 : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) $u_0 = 0$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{4}{4} = 1$; $u_3 = \frac{9}{8}$; $u_4 = \frac{16}{16} = 1$

0,5

2) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ sur $[0 ; +\infty[$

$\Delta = 4 - 4 \times (-1) = 8$ $\quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2} \simeq 2,4 \\ \cancel{x_2 = 1-\sqrt{2}} < 0 \end{cases}$

1

x	0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$a = -1$ $\quad$ signe de $-a$ $\quad$ signe de a

3) $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$ Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n}$

$= \frac{(n+1)^2 - 2n^2}{2^{n+1}} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n^2}{2^{n+1}}$

0,75

Donc $\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

4) $u_{n+1} - u_n = \frac{f(n)}{2^{n+1}}$ avec $2^{n+1} > 0$

D'après le tableau de signes de $f(x)$,

on a $f(x) \leq 0$ pour $x \geq 1+\sqrt{2}$ or $1+\sqrt{2} \simeq 2,4$

0,75 Donc $f(n) < 0$ pour $n \geq 3$ soit $u_{n+1} \leq u_n$

Alors (u_n) décroissante à partir de $n = 3$ (strictement)