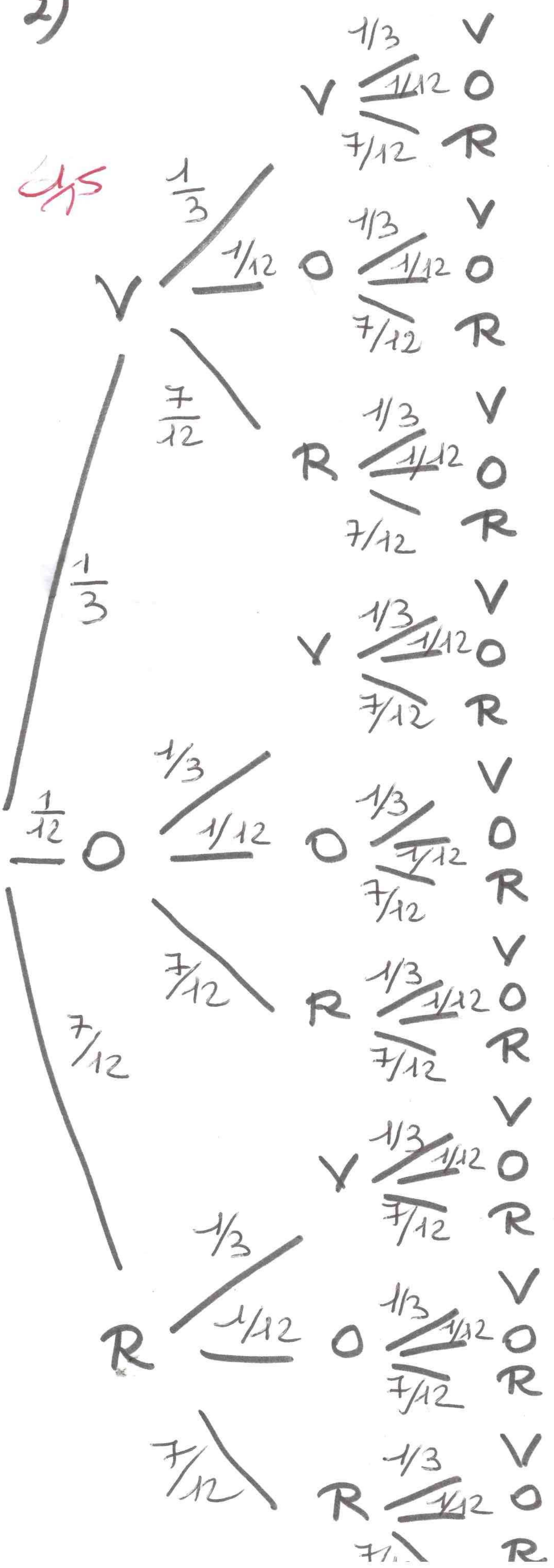
Correction du devoir n° 10 – 1.S

Ex1 : 1) 1 min = 60 s $\boxed{p(V)} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ 0,5

5

2)

1,5



3) a- $p(A) = p(V)^3$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$\simeq \underline{0,037}$

1

b- $p(B) = p(V) \times p(R) \times p(O)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{12} \times \frac{7}{12}$

$= \frac{7}{432} \simeq \underline{0,016}$

1

c- C est le contraire de « l'automobiliste ne rencontre aucun feu vert »

$p(C) = 1 - p(\bar{V})^3$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$

1

$= 1 - \frac{8}{27}$

$= \frac{19}{27} \simeq \underline{0,704}$

Ex 2 : Partie A

/6,5

1) On répète 5 fois la même expérience de Bernoulli "répondre à une question" avec 2 issues possibles

1

S : "la réponse est bonne" et $\overline{S}$ son contraire

Les 5 réponses sont indépendantes

$p = p(S) = \frac{1}{4} = 0,25 \quad p(\overline{S}) = \frac{3}{4} = 0,75$

La variable X qui comptabilise le nombre de succès suit la loi binomiale $B(5; \frac{1}{4})$

2) $\boxed{p(X=5)} = p^5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$ probabilité que le candidat obtienne la note maximale.

0,5

3)

0,5

valeurs x_i	0	1	2	3	4	5
probabilité	0,237	0,395	0,264	0,088	0,015	0,001

par défaut

$p(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$ $\quad p(X=1) = 5 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{405}{1024} \simeq 0,3955$

$p(X=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 10 \times \frac{27}{1024} = \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}$

$p(X=4) = 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right) = 5 \times \frac{3}{1024} = \frac{15}{1024}$

1,5

$p(X=5) = \frac{1}{1024}$ donc $p(X=3) = 1 - \frac{243+405+270+15+1}{1024}$

$= \frac{1024-934}{1024} = \frac{90}{1024} = \frac{45}{512}$

4) il s'agit de calculer $p(X \geqslant 2,5)$

soit $\underline{p(X \geqslant 3)} = p(X=3) + p(X=4) + p(X=5)$

$\simeq \boxed{0,104} \quad = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}$

0,75

Probabilité d'obtenir plus de la moyenne

5) il s'agit de calculer

$\underline{E(X)} = n \times p$

$= 5 \times \frac{1}{4} = \underline{1,25}$

0,75

Si le candidat remplissait au hasard un très grand nombre de QCM, il peut espérer obtenir la note moyenne de 1/5.

Partie B

1) on répète n fois la même expérience de Bernoulli « répondre au QCM » de façon indépendante avec 2 issues possibles

S' : « obtenir la note 5 » et $\overline{S'}$ son contraire 0,5

$p' = p(S') = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$ et $p(\overline{S'}) = \frac{1023}{1024}$

« au moins un candidat obtient 5 » est le contraire de aucun

0,5

donc $\boxed{P_n = 1 - \left(\frac{1023}{1024}\right)^n}$

2) $P_n \geqslant 0,99 \iff 1 - \left(\frac{1023}{1024}\right)^n \geqslant 0,99$ 0,5

$\iff -\left(\frac{1023}{1024}\right)^n \geqslant -0,01$

$\iff \underline{\left(\frac{1023}{1024}\right)^n \leqslant 0,01}$

$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1023}{1024}\right)^{4713} > 0,01 \\ \left(\frac{1023}{1024}\right)^{4714} < 0,01 \end{array}\right\}$

Donc il faut au moins 4714 candidats pour que au moins l'un d'entre eux obtienne 5/5 (en répondant au hasard) avec une probabilité supérieure à 0,99.

Ex2 : Partie C

1) • si le candidat obtient 5 bonnes réponses

$\underline{X = Y = 5}$

• s'il obtient 4 bonnes réponses et une fausse

$\underline{X=4}$ et $\underline{Y = 4 - 0,2 = 3,8}$

• s'il obtient 3 bonnes réponses et 2 fausses

$\underline{X=3}$ et $\underline{Y = 3 - 2 \times 0,2 = 2,6}$

• s'il obtient 2 bonnes réponses et 3 fausses

$\underline{X=2}$ et $\underline{Y = 2 - 3 \times 0,2 = 1,4}$

• s'il obtient 1 bonne réponse et 4 fausses

$\underline{X=1}$ et $\underline{Y = 1 - 4 \times 0,2 = 0,2}$

• s'il obtient 5 mauvaises réponses

$\underline{X=0}$ et $\underline{Y = 0 - 5 \times 0,2 = -1}$

On a $Y = X - 0,2 \times (5 - X) = X - 1 + 0,2X = \boxed{1,2X - 1}$

2) $Y \leq 0 \iff 1,2X \leq 1 \iff X = 0$

la note est négative avec une probabilité de $\underline{0,237}$ environ ($p(X=0)$)

$Y \geq 2,5 \iff 1,2X \geq 3,5 \iff X \geq \frac{3,5}{1,2} \iff X \geq 3$

la note est supérieure à la moyenne avec une probabilité de $\underline{0,104}$ environ ($p(X \geq 3)$)

3) $E(Y) = 1,2\,E(X) - 1$ (linéarité de la moyenne)

$= 1,2 \times 1,25 - 1 = 0,5$

Cette fois le candidat peut espérer obtenir une note moyenne de 0,5/5 en répondant au hasard

$0,5 > 0$ donc l'objectif n'est pas atteint.

Ex 3 : 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = 9$

ABCD est un rectangle donc $(CB)\perp(AB)$
et B est le projeté orthogonal de C sur (AB)

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB\times AC$ vecteurs colinéaires
$= -3\times 2 = -6$ de sens contraires

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = 3\times 2\times\cos(60°) = 3$

4) $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3\times 1 + (-2)\times(-2) = 1$

5) ABCD parallélogramme

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$ $BC=AD$

$= \frac{1}{2}(16+36-9) = \frac{43}{2}$

Ex 4 : 1) $(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}$

or $\begin{cases}\overrightarrow{ID}\perp\overrightarrow{CB} \text{ donc } \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{CB} = 0\\ \overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{IC} \text{ donc } \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{IC} = 0\\ \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \text{ donc } \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA} = DA^2\end{cases}$

donc $(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} + DA^2$

2) Dans le triangle AID rectangle en I d'après le théorème de Pythagore : $AI^2 = DA^2 + ID^2 = 9+1 = 10$

donc $\boxed{AI = \sqrt{10}}$ $IC = DC - ID = 3$

de même dans ICB rectangle en C : $IB^2 = BC^2 + IC^2 = 9+9 = 18$

donc $IB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = IA\times IB\times\cos\widehat{AIB}$

$\begin{cases}\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = -ID\times IC = -1\times 3 = -3\\ DA^2 = 9\end{cases}$ vecteurs colinéaires de sens contraires donc $\boxed{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 6}$

et $\boxed{\cos\widehat{AIB}} = \frac{6}{3\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

3) $\boxed{\widehat{AIB} \simeq 63°}$