Correction du devoir n° 8 - 1.S

Ex1 : $f(x) = \frac{x}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \neq 1$, $h \neq 0$ $\quad f(x+h) = \frac{x+h}{1-(x+h)} = \frac{x+h}{1-x-h}$ (/2)

donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \left(\frac{x+h}{1-x-h} - \frac{x}{1-x}\right) \times \frac{1}{h}$

$= \frac{(1-x)(x+h) - x(1-x-h)}{(1-x-h)(1-x)} \times \frac{1}{h}$

$= \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x^2} - \cancel{xh} - \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{xh}}{(1-x-h)(1-x)} \times \frac{1}{h}$ 1,5

$= \frac{h}{(1-x-h)(1-x)} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{(1-x-h)(1-x)} = g(h)$

$\lim_{h \to 0} g(h) = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 0,5

Ex2 : 1) $f'(-5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -5 ; la tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-5)=0$ 0,5

$f'(-2) = 2$; $f'(2) = -\frac{2}{3}$; $f'(6,5) = \frac{5}{4}$ 0,25 × 4

2) $f'(-3) = 2$ coefficient directeur de T_{-3} 0,25

3) ⓐ Graphiquement, l'inéquation $f(x) > 0$ a pour solutions les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus de l'axe des abscisses 0,5+0,25

$S =]-2,4 ; 3[\cup]4 ; 9]$

ⓑ $f'(x) > 0 \iff f$ strictement croissante

$S =]-5 ; -1[\cup]3,5 ; 9]$ 0,5

(/3)

Ex 3 : $BM = x$ donc $MC = BC - BM = 5 - x$ (3,5)

$0 \leq x \leq 5$

1) Dans le triangle BAC rectangle en A

- M sur [BC]
- P sur [BA]
- (MP) // (AC)

D'après la propriété de Thalès

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BP}{BA} = \frac{MP}{AC}$$

donc $\frac{x}{5} = \frac{MP}{4} \iff \boxed{MP = \frac{4}{5}x}$

1,5 de même, $\frac{CM}{CB} = \frac{MQ}{AB} = \frac{CQ}{CA}$ donc $\frac{5-x}{5} = \frac{MQ}{3}$

$\iff \boxed{MQ = \frac{3}{5}(5-x)}$

2) L'aire de APMQ (rectangle) est $MP \times MQ$

0,5 soit $f(x) = \frac{4}{5}x \times \frac{3}{5}(5-x) = \boxed{\frac{12}{25}x(5-x)}$

3) f définie dérivable sur [0;5]

$f(x) = \frac{12}{25}x \times 5 - \frac{12}{25}x^2 = \frac{12}{5}x - \frac{12}{25}x^2$

$f'(x) = \frac{12}{5} - \frac{24}{25}x = \frac{12}{5}\left(1 - \frac{2}{5}x\right)$

1

x	0		$5/2$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$f(5/2) = \frac{12}{25} \times \frac{5}{2}\left(5 - \frac{5}{2}\right)$

$= \frac{6}{5} \times \frac{5}{2} = 3$

f atteint son maximum pour $x = \frac{5}{2}$

0,5 Donc l'aire de APMQ est maximale pour $BM = \frac{5}{2}$

soit M milieu de [BC]

(alors l'aire sera de 3 u.a.)

Ex 4 : 1ère Partie $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

définie dérivable sur $\mathbb{R}$

1 - f est un polynôme

donc $\begin{cases} \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty \\ \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty \end{cases}$ 0,5

2 - $\boxed{f'(x) = 6x^2 - 6x - 2 = 2(3x^2 - 3x - 1)}$ $\Delta = 9 - 4 \times 3 \times (-1) = 21$

0,25 $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{6}$ $(x_1 \simeq 1,3 \ ; \ x_2 \simeq -0,3)$

0,25

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{21}}{6}$		$\frac{3+\sqrt{21}}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$ $a = 6$		+ signe de a	0	− signe de −a	0	+ signe de a	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_2)$	↘	$f(x_1)$	↗	$+\infty$

0,5

$\begin{cases} f(x_1) \simeq -0,3 \\ f(x_2) \simeq 3,3 \end{cases}$

2ème Partie $g(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 1}$

définie dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

0,25

1) g est une fonction rationnelle

donc $\begin{cases} \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty \\ \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty \end{cases}$

0,5

$\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - x - 3) = -2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0^-$

$\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0^+$

Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -\infty}$

0,75

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ (verticale).

0,25

2) ⓐ $ax+b+\frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(-a+b)x-b+c}{x-1}$

$= g(x)$

$\Leftrightarrow ax^2+(-a+b)x+(-b+c) = 2x^2-x-3$

0,75 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ -a+b=-1 \\ -b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$ $\boxed{g(x) = 2x+1-\frac{2}{x-1}}$

ⓑ $\begin{cases} \mathcal{D}: y = 2x+1 \\ g(x)-(2x+1) = -\frac{2}{x-1} \end{cases}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0 \end{cases}$

0,75

Donc $\mathcal{D}$ est asymptote de $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ et en $-\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	‖	$+$	
$g(x)-(2x+1)$		$+$	‖	$-$	

0,5

$\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty;1[$
et au-dessous de $\mathcal{D}$ sur $]1;+\infty[$

3) $g'(x) = \frac{(4x-1)(x-1)-(2x^2-x-3)\times 1}{(x-1)^2}$ $g=\frac{u}{v}$ $g'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

0,75 $= \frac{4x^2-5x+1-2x^2+x+3}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x+4}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{2(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}}$

$(x-1)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc $g'(x)$ est du signe de
$2 > 0$ $P(x) = x^2-2x+2$ $\Delta = 4-4\times 2 = 4-8 = -4$

0,5 $\Delta < 0$ donc $P(x) > 0$ du signe de $a=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ $+\infty$

0,5

3ème Partie

1) ⓐ $f(x) = g(x) \iff 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x - 1}$

sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\iff (2x^3 - 3x^2 - 2x + 3)(x - 1) = 2x^2 - x - 3$

$\iff 2x^4 - 2x^3$
$- 3x^3 + 3x^2$
$- 2x^2 + 2x$
$+ 3x - 3 = 2x^2 - x - 3$

$\iff 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 5x - 3 = 2x^2 - x - 3$

$\iff 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 6x = 0$

$\iff \boxed{x(2x^3 - 5x^2 - x + 6) = 0}$

1

or $(x+1)(x-2)(2x-3) = (x^2 - x - 2)(2x - 3)$
$= 2x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 3x - 4x + 6$
$= 2x^3 - 5x^2 - x + 6$

donc $\boxed{f(x) = g(x) \iff x(x+1)(x-2)(2x-3) = 0}$

ⓑ $\iff x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 3/2$

$f(0) = g(0) = 3 \qquad f(-1) = g(-1) = -2 - 3 + 2 + 3 = 0$

0,5 $f(2) = g(2) = \dfrac{8 - 2 - 3}{1} = 3 \qquad f(3/2) = g(3/2) = \dfrac{9/2 - 3/2 - 3}{1/2} = 0$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en 4 points
$A(-1;0)$, $B(0;3)$, $C(3/2;0)$ et $D(2;3)$

2) ⓐ T tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-1/2$

$T : y = f'(-1/2) \times (x - (-1/2)) + f(-1/2)$

$\begin{cases} f(-1/2) = 2 \times \dfrac{-1}{8} - 3 \times \dfrac{1}{4} - 2 \times \dfrac{-1}{2} + 3 = \dfrac{-1}{4} - \dfrac{3}{4} + 4 = -1 + 4 = 3 \\ f'(-1/2) = 6 \times \dfrac{1}{4} - 6 \times \dfrac{-1}{2} - 2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{6}{2} - \dfrac{4}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

donc $T : y = \dfrac{5}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + 3$

$y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{5}{4} + 3$

0,5

$\boxed{y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{17}{4}}$

ⓑ Il s'agit de résoudre $g'(x) = \frac{5}{2}$ mêmes coefficients directeurs

c'est à dire $\frac{2(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{5}{2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\Leftrightarrow 4(x^2-2x+2) = 5(x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 8 = 5x^2 - 10x + 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Delta = 4 - 4\times(-3) = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$\begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$ $g(3) = \frac{18-3-3}{2} = 6$

$\mathcal{C}_g$ admet une tangente parallèle à (T) aux points $A(-1;0)$ et en $E(3;6)$ 1

Exercice 4 (12 points)

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \qquad\qquad g(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1ère Partie : Etude de la fonction f

1,5

1. Déterminer les limites de la fonction f.
2. Calculer f' la fonction dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f.

2ème Partie : Etude de la fonction g

1. Déterminer les limites de la fonction g et interpréter graphiquement.
2. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que
$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

5,5

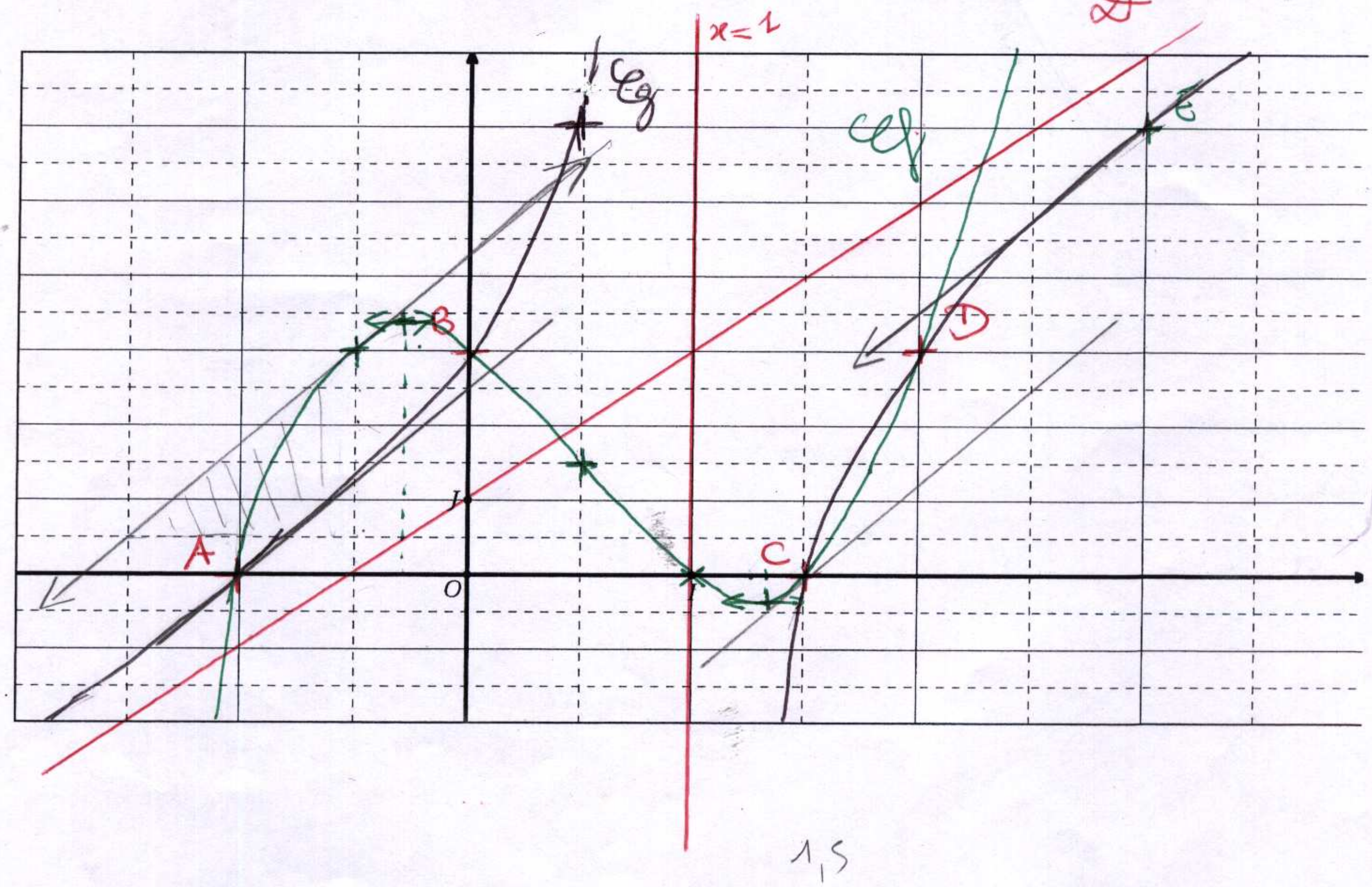
   (b) En déduire que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$; déterminer la position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Calculer g' la fonction dérivée de g, puis dresser le tableau de variations de g.

3ème Partie :

1. (a) Vérifier que $f(x) = g(x) \iff x(x+1)(x-2)(2x-3) = 0$
   (b) En déduire les coordonnées de tous les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. (a) Déterminer l'équation de la droite (T), tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

4,5

   (b) En quels points $\mathscr{C}_g$ admet-elle une tangente parallèle à (T) ?
3. Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-joint.



1,5