Correction du dev n° 6 — 1.S

14,5

Ex 1 : 1) $f_1(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3 \quad D_{f_1} = \mathbb{R}$

$$f_1(x) = x^3\left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) \quad (x \neq 0) \qquad 0{,}75$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^3}$;

0,75 Par Somme $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = -1$

0,5

0,25 et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

0,5 Par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

/2

2) $f_2(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} \quad D_{f_2} = \mathbb{R} \quad (x \neq 0) \quad f(x) = \dfrac{x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$

$$= \frac{2 - 3/x + 1/x^2}{1 + 1/x^2} \qquad 0{,}75$$

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(2 - 3/x + 1/x^2\right) = 2$
$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ 0,5

Par Quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = 2}$ 0,5

Alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à C_{f_2} en $-\infty$. 0,5

/2,25

3) $f_3(x) = \dfrac{3 - 4x}{x - 1} \quad D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

/2

$\lim\limits_{x \to 1}(3 - 4x) = -1$
$\lim\limits_{x \to 1^+}(x - 1) = 0^+$
$\lim\limits_{x \to 1^-}(x - 1) = 0^-$
0,75

Par Quotient
$\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} f_3(x) = -\infty}$
$\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f_3(x) = +\infty}$
0,75

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale C_{f_3}. 0,5

4) $f_4(x) = \dfrac{-2x^4 + x - 7}{3x^2 - 5}$ fonction rationnelle 0,25

/0,75

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^4}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2x^2}{3} = -\infty$ 0,5

5) $f_5(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 3}$ 3 est racine du numérateur et du dénominateur

$f_5(x) = \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(2x-1)}$ 0,5 — 0,5 $D_{f_5} = \mathbb{R} \setminus \{1/2 ; 3\}$

$= \dfrac{x+2}{2x-1}$ 0,5. $x \neq 3$ 1,25

$\lim\limits_{x \to 3} (x+2) = 5$
$\lim\limits_{x \to 3} (2x-1) = 5$
Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to 3} f_5(x) = 1}$
0,25 0,5

6) $f_6(x) = \dfrac{4x - \sqrt{x}}{x}$ $D_{f_6} =]0 ; +\infty[$

$f_6(x) = 4 - \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 0,5 1,75

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0^+$ Par quotient $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ 0,75

Par Somme $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f_6(x) = -\infty}$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à C_{f_6} 0,5

7) $f_7(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3}$ $g(x) = x^2 - 2x - 3$ 1,75
$= (x+1)(x-3)$

$D_{f_7} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 3\}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g(x)$ $a=1$		$+$ signe de a	ϕ	$-$ de -a	ϕ	$+$ de a	

1

$\lim\limits_{x \to -1} (2x-1) = -3$
$\lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 - 2x - 3) = 0^-$
$\lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 2x - 3) = 0^+$
0,75

Par quotient
$\boxed{\lim\limits_{x \to -1^+} f_7(x) = +\infty}$
$\boxed{\lim\limits_{x \to -1^-} f_7(x) = -\infty}$ 0,5

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à C_{f_7}. 0,5

Ex 2

$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 3}{x - 2}$ $D_f =]2 ; +\infty[$

15,5

1) f fonction rationnelle 0,25

1,25

• $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ 0,5

• $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 2x - 3) = 1$
$\lim_{x \to 2^+} (x - 2) = 0^+$ 0,5

Par quotient $\boxed{\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty}$ 0,5

donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à C_f (verticale) 0,5

2) $ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2) + c}{x-2} = f(x)$

a) $\Leftrightarrow ax^2 + (b - 2a)x - 2b + c = 2x^2 - 2x - 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -2 \\ -2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

1,25

donc $\boxed{f(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x-2}}$

b) $\begin{cases} \text{Soit } D : y = 2x + 2 \\ f(x) - (2x+2) = \frac{1}{x-2} \end{cases}$ 0,5

1,25

$\lim_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$ Par quotient $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ 0,5

Donc D est asymptote à C_f en $+\infty$ 0,25

c) pour $x > 2$ on a $x - 2 > 0$ donc $f(x) - (2x+2) > 0$
et $f(x) > 2x + 2$

0,75

Alors C_f est au-dessous de D