Correction du devoir n°3 – 1S

Ex1 : 1) $4x^2-4x-2=0 \iff 2x^2-2x-1=0$

$\Delta = 4-4\times 2\times(-1) = 12$ deux racines distinctes

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ $x_1 = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{4}$; et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

1 $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$

2) $-\dfrac{3}{4}x^2 + 2x - 5 = 0 \iff -3x^2+8x-20=0$

0,5 $\Delta = 64 - 4\times 3\times 20$ $\Delta < 0$ donc $S = \emptyset$

3) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{2}$ On travaille sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\iff \dfrac{x^2-4}{2x} = \dfrac{3x}{2x} \iff x^2-3x-4=0$ $\Delta = 9-4\times(-4) = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

1,5 deux racines $x_1 = \dfrac{3+5}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{3-5}{2} = -1$

$S = \{-1 ; 4\}$

4) $\dfrac{3x^2+10x+8}{x+2} = 2x+5$ On travaille sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\iff 3x^2+10x+8 = (x+2)(2x+5)$

1,5 $\iff 3x^2+10x+8 = 2x^2+9x+10$

$\iff x^2+x-2=0$ $\Delta = 1-4\times(-2) = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

deux racines

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$

$S = \{1\}$

Ex2 : 1) $x^2-8x+7 \geq 0$ $\Delta = 64-4\times 7 = 36$ $\sqrt{\Delta} = 6$

deux racines

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{8+6}{2} = 7 \\ x_2 = \dfrac{8-6}{2} = 1 \end{cases}$

1,25

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
x^2-8x+7 $a=1$		+ signe de a	0	− de −a	0	+ de a	

$S =]-\infty ; 1] \cup [7 ; +\infty[$

2) $-3x^2+6x-3 \geq 0 \underset{:(-3)}{\iff} x^2-2x+1 \leq 0 \iff (x-1)^2 \leq 0$

0,75 $S = \{1\}$ un carré est toujours positif

3) $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} > 0$ • $D(x) = x^2+x-2$

$x_1 = 1$ ou $x_2 = -2$ racines de $D(x)$

On travaille sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

• $N(x) = 2x^2+5x+3$

$\Delta = 25 - 4\times 2\times 3 = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1$ deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+1}{4} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-5-1}{4} = -3/2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		$-3/2$		-1		1		$+\infty$
$N(x)$ $a=2$		+	‖	+	0	−	0	+	‖	+	
$D(x)$ $a=1$		+	‖	−		−		−	‖	+	
$\dfrac{N(x)}{D(x)}$		+	‖	−	0	+	0	−	‖	+	

du signe de a à l'extérieur des racines

1,75

$S =]-\infty;-2[\cup]-3/2;-1[\cup]1;+\infty[$

i) $\dfrac{x+3}{x-4} \geq \dfrac{1}{x}$ on travaille sur $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x+3)-(x-4)}{x(x-4)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+4}{x^2-4x} \geq 0$

$N(x) = x^2+2x+4$

$\Delta = 4-16 = -12$

$\Delta < 0$ donc $N(x) > 0$ du signe de $a=1$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$N(x)$		+	‖	+	‖	+	
x^2-4x $a=1$		+	‖	−	‖	+	
$\dfrac{N(x)}{x^2-4x}$		+	‖	−	‖	+	

1,75

$S =]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$

Ex 3 : $(E) : x^2+(m+1)x+(m+1)=0$ $(m \in \mathbb{R})$

1) $\Delta_m = (m+1)^2 - 4(m+1) = m^2+2m+1-4m-4$

$= m^2-2m-3$

2) (E) admet une seule racine $\Leftrightarrow \Delta_m = 0$

$\Delta = 4-4\times(-3) = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ m_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Soit pour $m=-1$ ou $m=3$

$\begin{cases} \text{pour } m=-1 & (E) \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0 & S=\{0\} \\ \text{pour } m=3 & (E) \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \\ & \Leftrightarrow (x+2)^2=0 & S=\{-2\} \end{cases}$

3) (E) admet 2 racines distinctes $\Leftrightarrow \Delta_m > 0$

m	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Δ_m $a=1$		$+$ signe de a	0	$-$ signe de $-a$	0	$+$ signe de a	

soit pour $m \in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$

Soient x_1 et x_2 les 2 racines de (E)

alors $x_1+x_2 = \frac{-b}{a} = (m+1)$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = (m+1)$

4) $x^2+(m+1)x+(m+1)>0$ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta_m < 0$ alors le trinôme sera du signe de $a=1$

soit pour $m \in]-1;3[$