Correction du devoir n° 12 1ère S

Ex1 : 1) $u_n = n^2 - 3n + 1 = f(n)$ $n \in \mathbb{N}$
avec $f(x) = x^2 - 3x + 1$ définie dérivable sur $[0;+\infty[$

$f'(x) = 2x - 3$

x	0	$3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 ↘	$-5/4$	↗ $+\infty$

$3/2 = 1{,}5$

$f(3/2) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1$
$= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{4}{4}$
$= -5/4$

(u_n) est strictement croissante à partir de $n = 2$

1,5

2) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3 \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 + 3$
$2u_n^2 + 3 > 0$

0,5

donc $u_{n+1} > u_n$ (u_n) strictement croissante sur $\mathbb{N}$

3) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{u_n}{5} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = -\frac{1}{5} u_n$
(u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$ de 1er terme $u_0 = $

$-\frac{1}{5} < 0$ donc (u_n) n'a pas de variations
elle est alternée

0,5

4) $u_n = \frac{3^{n+1}}{5^n}$ $n \in \mathbb{N}$

$u_n > 0$ pour tout n car $3 > 0$ et $5 > 0$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+2}/5^{n+1}}{3^{n+1}/5^n} = \frac{3^{n+2}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3^{n+1}} = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{3}{5} < 1$

1,5

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_{n+1} < u_n$
donc (u_n) strictement décroissante sur $\mathbb{N}$

5) $u_n = \frac{2^n}{n}$ $n \in \mathbb{N}^*$

1,5

$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} = 2^n\left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$
$= 2^n \times \frac{2n - (n+1)}{n(n+1)} = 2^n \times \frac{n-1}{n(n+1)}$

pour $n \geq 1$ $n - 1 \geq 0$
$u_{n+1} - u_n \geq 0$

(u_n) croissante sur $\mathbb{N}^*$

Ex2 : 1) $\begin{cases} u_4 = 12 \\ u_5 = 3072 \end{cases}$ $u_5 = u_4 \times q^4$

$\iff 3072 = 12 \times q^4$

$\iff 256 = q^4 \iff q = 4$

$q > 0$

(u_n) suite géométrique de raison 4.

$u_7 = u_5 \times q^2 = 3072 \times 16 = \underline{49\,152}$ 1

2) $v_1 = -6$

$v_1 + v_2 + \cdots + v_8 = 92$

$\iff \dfrac{(v_1 + v_8) \times 8}{2} = 92$

1,5 $\iff v_1 + v_8 = 23$

$\iff v_8 = 23 - v_1 = 29$

$v_8 = v_1 + 7r$

$\iff 29 = -6 + 7r$

$\iff 35 = 7r$

$\iff r = 5$

(v_n) suite arithmétique de raison 5.

3) $a \xrightarrow{+r} b \xrightarrow{+r} c$

- $a + b + c = 27$

$\iff (b - r) + b + (b + r) = 27$

$\iff 3b = 27 \iff b = 9$

0,5

2

- $a^2 + b^2 + c^2 = 261$

$\iff (b-r)^2 + b^2 + (b+r)^2 = 261$

1,25 $\iff 3b^2 + 2r^2 = 261$

$\iff 2r^2 = 261 - 3 \times 9^2 = 18$

$\iff r^2 = 9 \iff r = 3$ ou $r = -3$

0,5 $\underline{a = 6}$; $\underline{b = 9}$; $\underline{c = 12}$ ou $\underline{a = 12}$; $\underline{b = 9}$; $\underline{c = 6}$

4) $2 + 5 + 8 + \cdots + 32 + 35$

$= u_0 + u_1 + \cdots \cdots + u_n$

$= u_0 + u_1 + \cdots + u_{11}$

$= \dfrac{(u_0 + u_{11}) \times 12}{2}$

$= \dfrac{(2 + 35) \times 12}{2} = 222$

suite arithmétique de raison 3 de 1er terme $u_0 = 2$

$u_n = u_0 + nr = 2 + 3n$

$35 = 2 + 3n \iff 3n = 33$

$\iff n = 11$

1,5

5) $u_0 = 3$ (u_n) géométrique de raison 2

$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 196\,605$

$\Leftrightarrow u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q} = 196\,605$

$\Leftrightarrow 3 \times \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = 196\,605 \Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 = 65\,535$

$\Leftrightarrow 2^{n+1} = 65\,536$

$\Leftrightarrow 2^n = 32\,768$ 1,5

$\Leftrightarrow n = 15$

Ex3 : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

1) $u_1 = \dfrac{u_0 + 6}{u_0 + 2} = \dfrac{5}{1} = 5$ $u_2 = \dfrac{u_1 + 6}{u_1 + 2} = \dfrac{11}{7}$ 0,5

$\begin{cases} u_1 - u_0 = 5 - (-1) = 6 \\ u_2 - u_1 = \dfrac{11}{7} - 5 = -\dfrac{24}{7} \end{cases}$ $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ (u_n) n'est pas arithmétique

0,75

$\begin{cases} \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{-1} = -5 \\ \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{11/7}{5} = \dfrac{11}{35} \end{cases}$ $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ (u_n) n'est pas géométrique

0,75

2) $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$

a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \dfrac{\dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} - 2}{\dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} + 3} = \dfrac{\dfrac{u_n + 6 - 2(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\dfrac{u_n + 6 + 3(u_n + 2)}{u_n + 2}}$

1,5

$v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 2}{4u_n + 12} = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3} = -\dfrac{1}{4} v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{4}$ de 1er terme $v_0 = -3/2$ $\left(v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \dfrac{-3}{2}\right)$

0,5

b) $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ 0,5

c) $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n = 0$

par produit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$ 0,5

3) $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$

$\iff (u_n + 3)\, v_n = u_n - 2$

$\iff u_n v_n + 3v_n = u_n - 2$

$\iff u_n v_n - u_n = -3v_n - 2$

$\iff u_n (v_n - 1) = -3v_n - 2$

$n \in \mathbb{N}$

$\iff u_n = \dfrac{-3v_n - 2}{v_n - 1}$

$\iff u_n = \dfrac{3v_n + 2}{1 - v_n}$ 1,25

4) Par somme et produit

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3v_n + 2) = 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - v_n) = 1$

Par Quotient (u_n) converge vers 2

0,75