Correction du devoir n°10. 1.S

Ex 1 : 1) $M(x;y)$ est sur la hauteur d_A issue de A

$A(-2;0)$ $\iff (AM) \perp (BC) \iff \vec{AM}\cdot\vec{BC}=0$ $\quad \vec{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$

$B(4;3)$ $\iff -2(x+2)-6y=0$

$C(2;-3)$ $\iff x+2+3y=0 \iff \boxed{y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}$ d_A 1,25

$N(x;y)$ est sur la hauteur d_B issue de B

$\iff (BN)\perp(AC) \iff \vec{BN}\cdot\vec{AC}=0$ $\quad \vec{BN}\begin{pmatrix}x-4\\y-3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\iff 4(x-4)-3(y-3)=0$

$\iff 4x-16-3y+9=0$

$\iff 4x-3y-7=0 \iff \boxed{y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}}$ d_B 1,25

2) H orthocentre du triangle ABC est l'intersection de d_A et d_B ; ses coordonnées sont solution de

$$\begin{cases}y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\ y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\end{cases} \iff \begin{cases}y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}x-\frac{7}{3}=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\end{cases} \iff \begin{cases}y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\ \frac{5}{3}x=\frac{5}{3}\end{cases} \iff x=1 \text{ et } y=-1$$

0,5

$\boxed{H(1;-1)}$

/3

Ex 2 : $A(6;0)$ et $B(8;4)$

/4

1) $x^2-6x+y^2-8y=0$

$\iff (x-3)^2+(y-4)^2-9-16=0$

$\iff \boxed{(x-3)^2+(y-4)^2=25}$

c'est l'équation du cercle $\mathcal{C}(I;5)$ avec $I(3;4)$ 0,75

$(0-3)^2+(0-4)^2=9+16=25$

$(6-3)^2+(0-4)^2=9+16=25$

$(8-3)^2+(4-4)^2=25+0=25$

donc O, A et $B\in\mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle OAB 0,5

2) $\Delta : x-y+6=0 \iff y=x+6$

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ sont solutions de :

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=25\\ y=x+6\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(x-3)^2+(x+2)^2=25 \quad (*)\\ y=x+6\end{cases}$$

$\iff (x=3 \text{ et } y=9)$ ou $(x=-2 \text{ et } y=4)$

$(*) \iff 2x^2-2x+13=25$

$\iff x^2-x-6=0$

$\Delta=25 \quad \sqrt{\Delta}=5$

$$\begin{cases}x_1=\frac{1+5}{2}=3\\ x_2=\frac{1-5}{2}=-2\end{cases}$$

1,5

0,25

Δ et $\mathcal{C}$ se coupent en deux points $J(3;9)$ et $K(-2;4$

3) Soit T tangente à $\mathcal{C}$ en $D(6;8)$: $(6-3)^2+(8-4)^2 = 9+16=25$ donc $\boxed{D \in \mathcal{C}}$

alors $T \perp (ID)$ $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ vecteur normal à T

0,25

donc $T : 3x+4y+c=0$

$D(6;8) \in T \iff 18+32+c=0 \iff c=-50$

donc $\boxed{T : 3x+4y-50=0}$ 0,75

Ex3 : 1) $AB=7$ $\quad BC=8$ $\quad AC=10$ $\quad$ /4

$AC^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + BC^2$

$= AB^2 + BC^2 - 2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ $\qquad$ Al-Kashi

$= AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

donc $100 = 49+64 - 2\times7\times8 \times \cos\widehat{ABC}$ $\quad$ 1+0,25

$\iff \boxed{\cos\widehat{ABC} = \dfrac{13}{112}}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\widehat{ABC} \simeq 83°}$

2) $\sin^2\widehat{ABC} + \cos^2\widehat{ABC} = 1 \iff \sin^2\widehat{ABC} = 1 - \left(\dfrac{13}{112}\right)^2$

$\iff \sin^2\widehat{ABC} = \dfrac{12375}{112^2}$ $\qquad$ 0,25

$\sin\widehat{ABC} > 0$ car dans un triangle tous les angles sont compris entre 0 et 180°

d'où $\boxed{\sin\widehat{ABC} = \dfrac{15\sqrt{55}}{112}}$ $\quad$ 0,5

Dans ABH rectangle en H : $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AH}{AB} \iff AH = AB \times \sin\widehat{ABC}$

donc $AH = 7 \times \dfrac{15\sqrt{55}}{112} = \dfrac{15\sqrt{55}}{16}$

1

alors l'aire du triangle ABC est

$\dfrac{1}{2} AH \times BC = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{15\sqrt{55}}{16} \times 8 = \dfrac{15\sqrt{55}}{4} \simeq 27,8$

3) $AC^2 + AB^2 = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})^2$

$= AI^2 + 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC} + IC^2 + AI^2 + 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} + IB^2$ $\quad$ 1

$= 2AI^2 + 2IC^2 + 2\overrightarrow{AI}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}}$ car I milieu de $[BC]$

$IB = IC = \frac{1}{2} BC = 4$

$\iff 100+49 = 2AI^2 + 32$

$\iff 2AI^2 = 117 \iff AI^2 = \dfrac{117}{2} \iff AI = \dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{26}}{2}$

médiane

Ex4 : 1) $\frac{-11\pi}{6} = \frac{-12\pi+\pi}{6} = -2\pi + \frac{\pi}{6}$ A_1

2) $\frac{49\pi}{4} = \frac{48\pi+\pi}{4} = 12\pi + \frac{\pi}{4}$ A_2

3) $\frac{-25\pi}{3} = \frac{-24\pi-\pi}{3} = -8\pi - \frac{\pi}{3}$ A_3

/1

4) $\frac{-91\pi}{6} = \frac{-90\pi-\pi}{6} = -15\pi - \frac{\pi}{6} = -14\pi - \pi - \frac{\pi}{6}$

$= -14\pi - \frac{7\pi}{6}$ A_4

Ex5 : $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

/2,5

1) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 1$

0,5

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4-(2+\sqrt{2})}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

or $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} < \pi$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) < 0$ alors $\boxed{\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

2) $\frac{3\pi}{8} = \pi - \frac{5\pi}{8}$ donc $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$
et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

0,5 × 3

$\frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{2}$ donc $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{8} = \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \\ \sin\frac{\pi}{8} = -\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \end{cases}$

$\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$ donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = -\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \end{cases}$

$A = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$= \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 0$

0,25

$B = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$= -\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 0$

0,25

Ex6 : 1) dans $]-\pi ; \pi]$ (/2,5)

$2\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1/2$ 0,25

$S = \{-\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\}$

$2\cos x + 1 < 0$

$\Leftrightarrow \cos x < -1/2$ 0,75

$S =]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3} ; \pi]$

2) dans $[0 ; 2\pi[$

$2\sin x + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,25

$S = \{\frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\}$

$2\sin x + \sqrt{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,75

$S = [0 ; \frac{5\pi}{4}] \cup [7\pi/4 ; 2\pi[$

3) dans $[0 ; 2\pi[$

$\cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,5

$S = \{\pi/6 ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\}$

Ex7 1) a) $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $(\overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AI}) = \pi/3 + 2k\pi$ 0,75

b) $(\overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AI}) + 2k\pi$ (Chasles)

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ 0,5

2) a) AJI isocèle en A 0,25

b) $\widehat{JAJ} = \frac{5\pi}{6}$ $(\overrightarrow{JI} ; \overrightarrow{JA}) = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ 0,5

3) $(\overrightarrow{JA} ; \overrightarrow{JB}) = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$; $(\overrightarrow{JB} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 0,75

4) $(\overrightarrow{JI} ; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{JI} ; \overrightarrow{JA}) + (\overrightarrow{JA} ; \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{JB} ; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) + 2k\pi$

$= -\pi/12 + (-\pi/3) + \frac{2\pi}{3} + (-\pi/4) + 2k\pi$

$= 0 + 2k\pi$

Donc $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires 0,75

et $\boxed{(JI) // (BC)}$

/3,5