Devoir de mathématiques n^o 1 - 1èreS

22 septembre 2009 - 2H

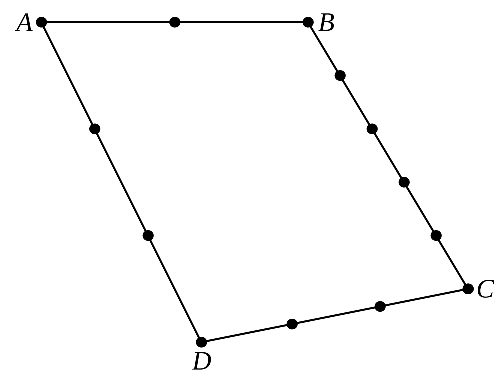
Exercice 1 : (4,5 pts)
Soit un triangle ABC. On considère les points I et G définis par :

$$\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BG} = \frac{-1}{5}\overrightarrow{BI}.$$

1. Ecrire I comme barycentre de A et C puis G comme barycentre de B et I
2. Montrer que G est le barycentre de $(A, 2), (B, 6), (C, -3)$.
3. On considère le point J tel que : $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{BC}$.
   (a) Ecrire J comme barycentre de B et C.
   (b) Démontrer que A, G et J sont alignés.

Exercice 2 : (2 pts)

On donne un quadrilatère $ABCD$.
Les points sur les segments des côtés sont réguliers.
A l'aide de la règle, construire le point G barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 4)$ et $(D, 2)$.
Les traits de construction serviront de justification.



Exercice 3 : (5 pts)
Soient A, B et C trois points non alignés ; soient D le barycentre de $(B, 2), (C, 4)$, E le barycentre de $(A, 1), (C, 4)$ et F le barycentre de $(A, 1), (B, 2)$.

1. Déterminer la position des points D, E et F.
2. Montrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en un point P que l'on déterminera.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels :

$$|| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} || = || \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} ||$$

4. Construire Γ.

Exercice 4 : (4 pts)
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On considère les points $A(4;-5)$, $B(-3;-2)$, $C(3;0)$ et $D(5;4)$.

1. Déterminer les coordonnées du point E tel que $BCDE$ soit un parallélogramme, puis les coordonnées du centre L du parallélogramme.
2. Soit G le barycentre des points $(A,2),(B,1),(C,1),(D,1),(E,1)$; déterminer les coordonnées du point G.
3. Démontrer que les points A, G et L sont alignés.
4. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle ABD.

Exercice 5 : (4,5 points)
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$$

1. Prouver que le point B est un point de Γ.
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du choix de M.
3. Soit G le barycentre des points $(A,1),(B,-4),(C,1)$; prouver que $GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
4. Déterminer Γ.