Devoir de mathématiques n^o 7 - 1èreS

9 février 2010 - 1H

Exercice 1 (6,5 points)

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par

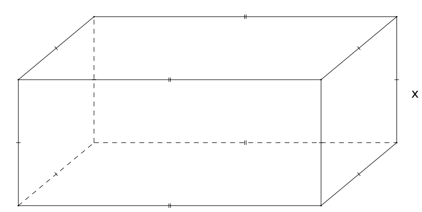
$$f(x) = x^2 - 3 \qquad et \qquad g(x) = \frac{16}{x}$$

.

1. Comparer les fonctions f et g en étudiant les variations de la fonction $h = f - g$.
   (Démarche :
   – Calculer $h'(x)$ et déterminer son signe (remarque : -2 est racine de $x^3 + 8$).
   – Dresser le tableau complet des variations de h sans justifier les limites.
   – Montrer que $h(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
   – Conclure.)
2. En déduire la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g.

Exercice 2 (5 points)

Une boîte à bijoux a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée (représenté ci-contre).
Son volume est de 1,5 dm^3.
Le matériau utilisé pour construire les bases coûte 600 € le m^2, et celui utilisé pour construire la surface latérale coûte 400 € le m^2.
On veut déterminer les dimensions de la boîte pour que le prix de revient soit minimal.
On appelle x le côté du carré de base et l la longueur de la boîte en dm.



1. Exprimer le volume total de la boîte en fonction de x et l ; en déduire l en fonction de x.
2. Exprimer l'aire totale des bases, puis l'aire latérale de la boîte en fonction de x.
3. Justifier que le prix de revient s'écrit $P(x) = 12x^2 + \dfrac{24}{x}$.
4. Etudier les variations de P.
5. Conclure en déterminant les dimensions de la boîte en cm.

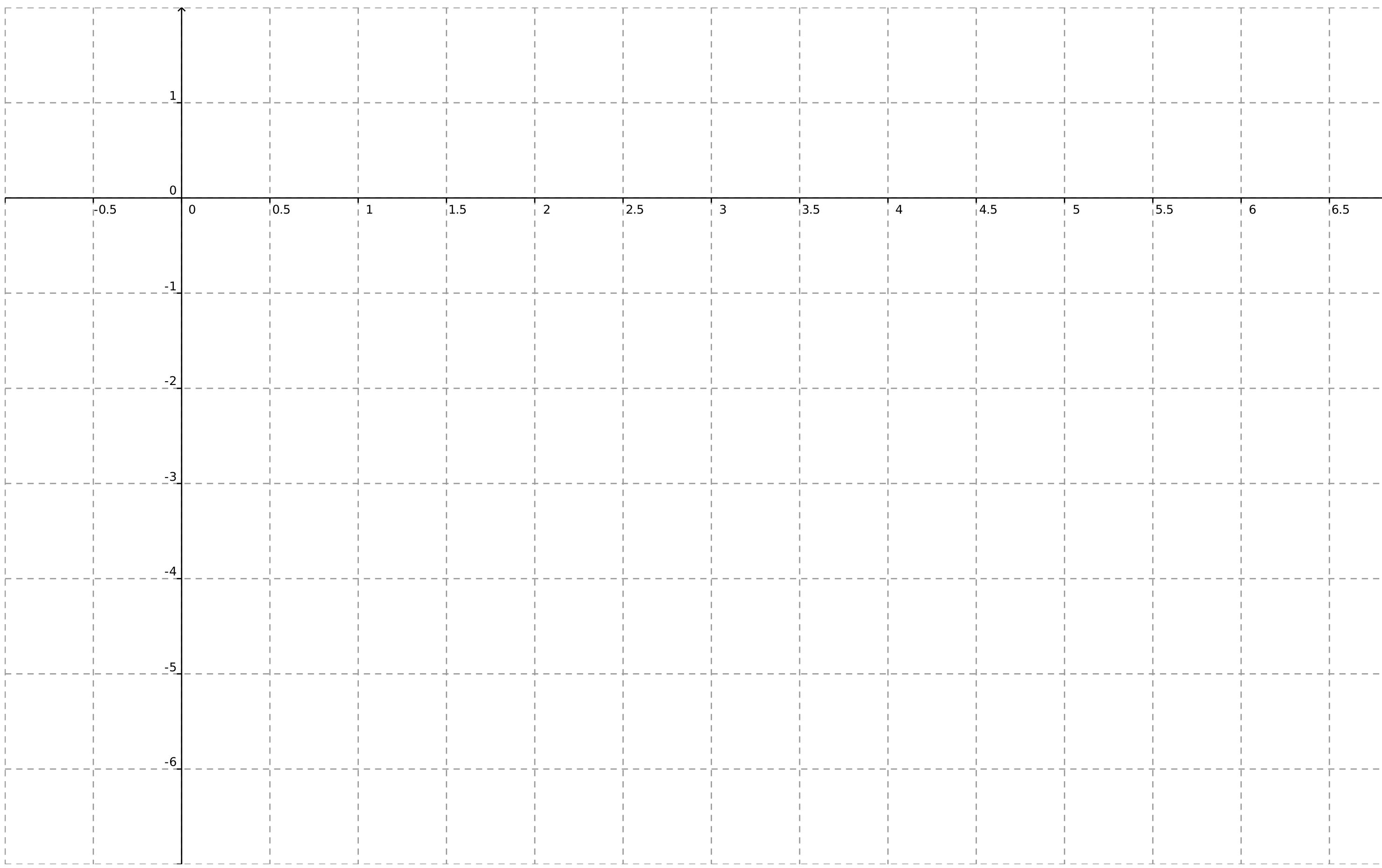
Exercice 3 (8,5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   (b) Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.
3. Calculer f' la dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$, et interpréter graphiquement.
5. Ecrire l'équation de la tangente T_A à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2, et l'équation de la tangente T_B à $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse 1.
6. Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-joint.



1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5